

ISSN 2500-0403

ВЕСТНИК  
БАЛТИЙСКОГО  
ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. КАНТА

Серия  
Физико-математические  
и технические науки

№ 1

Калининград  
Издательство Балтийского федерального университета  
им. Иммануила Канта  
2020

*Редакционная коллегия*

*А. В. Юров*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта (главный редактор);  
*С. В. Мацневский*, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта (ответственный редактор); *Н. Л. Великанов*, д-р техн. наук, проф., Институт транспорта и технического сервиса, БФУ им. И. Канта; *В. Е. Захаров*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *А. И. Иванов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. А. Ишанов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. Б. Лебле*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *И. В. Карпов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. И. Корягин*, д-р техн. наук, проф., Институт транспорта и технического сервиса, БФУ им. И. Канта; *С. П. Кшевцецкий*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *И. Б. Петров*, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. РАН, факультет управления и прикладной математики, Московский физико-технический институт (государственный университет); *А. А. Шананин*, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. РАН, факультет управления и прикладной математики, Московский физико-технический институт (государственный университет); *Б. Н. Четверушкин*, д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН; *А. А. Шпилевой*, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-65005 от 04 марта 2016 г.

*Адрес редакции:*  
236016, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Математика и информатика*

<i>Полетаева Н.Г.</i> Классификация систем машинного обучения.....	5
<i>Ткаченко С.Н., Ставицкий А.М., Маклахова И.С.</i> Нефинансовые механизмы привлечения и удержания клиентов в банковской сфере.....	23
<i>Поршнев С.В., Пономарева О.А., Соломаха Э.В.</i> Картографический модуль для визуализации местоположения IP-адресов.....	30

### *Теоретическая и экспериментальная физика*

<i>Иванов А.И., Халиков А.Т.</i> Перенос поляризации в системе NV- — P <sub>1</sub> в алмазе.....	37
<i>Иванов А.А., Иванов А.И., Кулагина А.А.</i> Фотолюминесценция <sup>15</sup> NV-центра, созданного имплантацией.....	43
<i>Бурмистров В.И., Пониматкин В.Е., Карпинская Т.А., Гоглев В.А., Кузьмичев С.А.</i> Усовершенствование конструкции низкочастотных передающих антенных систем.....	50
<i>Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И.</i> Особенности моделирования турбулентных газовых потоков с испаряющимися каплями.....	57
<i>Зайцев А.А., Руденко А.И., Алексева С.М.</i> Первый метод Стокса в задаче о волнах на поверхности жидкости конечной глубины.....	64
<i>Пониматкин В.Е., Шпилева С.Г., Гоглев В.А., Каскевич Б.И.</i> Оптимизация параметров передающих антенных систем СДВ- и ДВ-диапазонов.....	76
<i>Шабловский О.Н.</i> Распад слабого разрыва и распространение волн в нелокальной среде с источником.....	84
<i>Щербань В.Л.</i> Почему окружающее нас пространство именно трехмерно.....	97

## CONTENTS

### *Mathematics and computer science*

Poletaeva N. G. Classification of systems machine learning .....	5
Tkachenko S. N., Stavitsky A. M., Maklakhova I. S. Non-financial mechanisms for attracting and retaining customers in the banking sector .....	23
Poshnev S. V., Ponomareva O. A., Solomaha E. V. Cartographic module for visualizing the location of IP-addresses .....	30

### *Theoretical and experimental physics*

Ivanov A. I., Khalikov A. T. Polarization transfer in the NV <sup>-</sup> – P <sub>1</sub> system in diamond.....	37
Ivanov A. A., Ivanov A. I., Kulagina A. A. Photoluminescence of the <sup>15</sup> NV-center created by implantation .....	43
Burmistrov V. I., Ponimatkin V. E., Karpinskaya T. A., Goglev V. A., Kuzmichev S. A. Improving the design of low-frequency transmitting antenna systems.....	50
Velikanov N. L., Naumov V. A., Koryagin S. I. Features of modeling turbulent gas flows with evaporating droplets.....	57
Zaitsev A. A., Rudenko A. I., Alekseeva S. M. The first Stokes method in the problem of waves on a liquid surface of finite depth.....	64
Ponimatkin V. E., Shpilevaya S. G., Goglev V. A., Kashevich B. I. Optimization of the parameters of transmitting antenna systems of the SDV- and DV-bands.....	76
Shablovsky O. N. Decay of a weak gap and wave propagation in a nonlocal environment with a source.....	84
Scherban V. L. Why is the space around us three dimensional.....	97

УДК 681.3.07

*Н. Г. Полегаева*

## КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

*Приведена классификация методов машинного обучения в зависимости от способа обучения, рассмотрены основные алгоритмы машинного обучения и область применения. Особое внимание уделено обучению с подкреплением на основе Марковских процессов принятия решений.*

*The classification of machine learning methods is given depending on the technique of learning, the main algorithms of machine learning and the scope of application are considered. Particular attention is paid to reinforcement learning based on Markov decision processes.*

**Ключевые слова:** обучение с учителем, обучение без учителя, частичное обучение, обучение с подкреплением.

**Keywords:** supervised learning, unsupervised learning, semisupervised learning, reinforcement learning.

Машинное обучение — это методика анализа данных, которые позволяют компьютерам самостоятельно обучаться посредством решения массива сходных задач. Классификация и область применения систем машинного обучения приведена на рисунке 1 (с. 6). В [1] выделяют еще категорию «частичное обучение», большинство алгоритмов частичного обучения являются комбинациями алгоритмов обучения с учителем и без.

### Обучение с учителем

Обучающие данные включают желательные решения, называемые метками (label). Можно выделить самые важные алгоритмы обучения с учителем:

- линейная регрессия;
- логистическая регрессия;
- метод  $k$ -ближайших соседей;
- метод опорных векторов;
- деревья принятия решений и случайные леса;
- нейронные сети.

Обучение с учителем (или контролируемое обучение) может быть использовано для решения задач регрессии, чтобы прогнозировать целевое числовое значение переменной, располагая набором характеристик или признаков. Регрессионные проблемы, для которых входы имеют временную разницу, иногда называют анализом временных ря-

дов. Обнаружение аномалий – это слой поверх регрессии: он относится к проблеме определения, когда наблюдаемое значение существенно отличается от прогнозируемого значения.

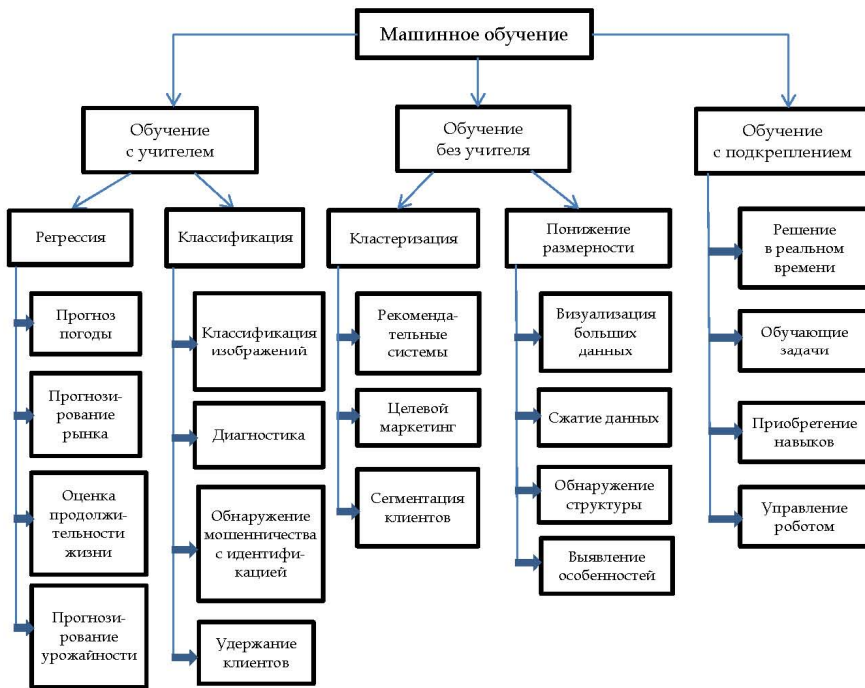


Рис. 1. Классификация и область применения систем машинного обучения

Некоторые алгоритмы регрессии могут применяться также для классификации. Например, логистическая регрессия, так как она способна получать вероятность принадлежности к заданному классу.

Так, метод *k-ближайших соседей* (*k*-nearest neighbors – KNN) – один из простых и часто используемых непараметрических методов классификации. Он состоит из следующих шагов:

- выбрать число *k* и метрику расстояния;
- найти *k*-ближайших соседей образца, который необходимо классифицировать;
- присвоить метку класса мажоритарным голосованием.

Метрики расстояния для определения того, как «ближние» точки расположены друг к другу в пространстве признаков, обычно представляют собой евклидово расстояние для непрерывных переменных и расстояние Хэмминга – для дискретных переменных. Основным недостатком алгоритма KNN заключается в создании моделей больших размеров, которые должны хранить все обучающие данные, содержащие векторы признаков и метки.

Идея ближайшего соседа расширяется и на другие задачи. Например, в задаче восстановления плотности вероятности с применением обобщенных оценок типа *k*-ближайших узлов [2]:



$$\hat{f}_N(x, k) = \frac{1}{N\delta_N(x, k)} \sum_{i=1}^N h\left(\frac{x - X^{(i)}}{\delta_N(x, k)}\right), \quad (1)$$

где параметр локальности  $\delta_N(x, k)$  есть радиус наименьшего шара с центром в точке  $x$  такого, что в нем находится не менее  $k$  узлов  $X^{(i)}$ ,  $X^{(i)} \in R^n$ .

Настроечным параметром оценки (1) является значение  $k$ , то есть количество ближайших узлов. Для его определения применяется принцип максимума эмпирического перекрестного правдоподобия в форме

$$\hat{k}_N = \arg \max_k \hat{L}(k), \quad \hat{L}(k) = \prod_{j=1}^N \hat{f}_N^{(j)}(X^{(j)}, k), \quad (2)$$

где оценка плотности вероятности  $\hat{f}_N^{(j)}(x, k)$  вычислена по всем узлам  $\{X^{(i)}\}_{i=1}^N$ , кроме  $j$ -го:

$$\hat{f}_N^{(j)}(x, k) = \frac{1}{N\delta_N(x, k)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N h\left(\frac{x - X^{(i)}}{\delta_N(x, k)}\right). \quad (3)$$

Задача разбиения экспериментального материала на обучающую и контрольную группы в данном случае имеет тот же смысл и порождает те же проблемы, что и в задачах классификации и построения регрессионных зависимостей. Соотношения (2), (3) определяют один из вариантов экономного использования экспериментального материала, при котором одни и те же данные различным образом многократно разбиваются на обучающее и контрольное множества. Таким способом формирования функции правдоподобия приходится пользоваться при сравнительно небольших объемах выборки  $N$ . Подчеркнем содержательно наиболее важный момент: то или иное разбиение наблюдений на две группы необходимо для проверки качества оценок — возможности их использования для интерполяции восстанавливаемой зависимости.

**Метод опорных векторов** (support vector machine — SVM) является (в простейшем виде) линейным классификатором подобно логистической регрессии, так как создает гиперплоскость в векторном пространстве, которая пытается разделить два класса в наборе данных. Метод SVM отличается от логистической регрессии функцией издержек. Логистическая регрессия использует функцию логарифмического правдоподобия, которая штрафует все точки пропорционально ошибке в оценке вероятности — даже те, которые находятся на правильной стороне гиперплоскости. Классификатор SVM пытается найти гиперплоскость с максимальным зазором, разделяющую два класса, где «зазор» указывает расстояние от разделяющей плоскости (границы решения) до ближайших обучающих образцов с каждой стороны, так называемых опорных векторов. Метод SVM использует *петлевую функцию*, ко-



торая штрафует только точки, расположенные на неправильной стороне гиперплоскости или очень близко к ней на правильной стороне (нарушение зазора образцом равно 0, если он расположен вне полосы на корректной стороне).

Еще одна причина, по которой модели SVM столь популярны, в том, что их можно легко модифицировать с использованием ядра для решения нелинейных задач классификации. Ключевая идея в основе ядерных методов для решения задач с линейно неразделимыми данными состоит в том, чтобы создать нелинейные комбинации исходных признаков и функцией отображения  $\phi(\cdot)$  спроецировать их на пространство более высокой размерности, где они становятся линейно разделимыми. Затем ту же самую функцию отображения  $\phi(\cdot)$  можно использовать для трансформации новых, ранее не наблюдавшихся данных, чтобы их классифицировать при помощи линейной модели SVM [3]. Именно в этом подходе можно применить так называемый ядерный трюк (или подмену скалярного произведения функцией ядра). На математическом уровне ядро преобразует одно векторное пространство  $V_1$  в другое пространство  $V_2$  и представляет собой функцию  $K(x, y)$  на  $V_1 \times V_2$ . Каждый  $x \in V_1$  отображается с помощью  $K(x, \cdot)$ , а  $V_2$  — пространство, охватываемое всеми такими функциями. На практике нужно всего лишь на шаге прямого вычисления скалярного произведения между двумя точками подставить ядерную функцию:

$$K(x^{(i)}, x^{(j)}) = \phi(x^{(i)})^T \phi(x^{(j)}).$$

Одним из наиболее часто используемых ядер является гауссово ядро радиальной базисной функции (radial basis function — RBF):

$$K(x^{(i)}, x^{(j)}) = \exp\left(-\gamma \|x^{(i)} - x^{(j)}\|^2\right),$$

где  $\gamma = \frac{1}{2\sigma^2}$  — параметр, который нужно оптимизировать;  $\|x^{(i)} - x^{(j)}\|$  — евклидово расстояние. Термин ядро можно интерпретировать как функцию подобия между парой образцов. Теперь необходимо обучить ядро SVM, чтобы оно могло провести нелинейную границу решения, хорошо разделяющую данные.

Чтобы продемонстрировать работу метода, сначала создадим набор данных для нелинейной задачи классификации, который имеет вид логического элемента XOR, используя для этого функцию `logical_xor` из библиотеки NumPy языка программирования Python, где первым 100 образцам назначается метка класса 1, другим 100 образцам — метка класса -1:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import random
```





```
np.random.seed(0)
X_xor = np.random.randn(200, 2)
y_xor = np.logical_xor(X_xor[:, 0] > 0, X_xor[:, 1] > 0)
y_xor = np.where(y_xor, 1, -1)
plt.scatter(X_xor[y_xor==1, 0], X_xor[y_xor==1, 1],
            c='tab:orange', marker='^', label='1')
plt.scatter(X_xor[y_xor==-1, 0], X_xor[y_xor==-1, 1],
            c='tab:blue', marker='s', label='-1')
plt.ylim (-3.0)
plt.legend ()
plt.show ()
```

9

Набор данных XOR со случайным шумом, сгенерированный приведенным выше кодом, показан на рисунке 2. Совершенно очевидно, что не получится хорошо разделить образцы из положительного и отрицательного классов, применив в качестве границы решения линейную гиперплоскость, построенную методом линейной логистической регрессии либо линейной модели SVM.

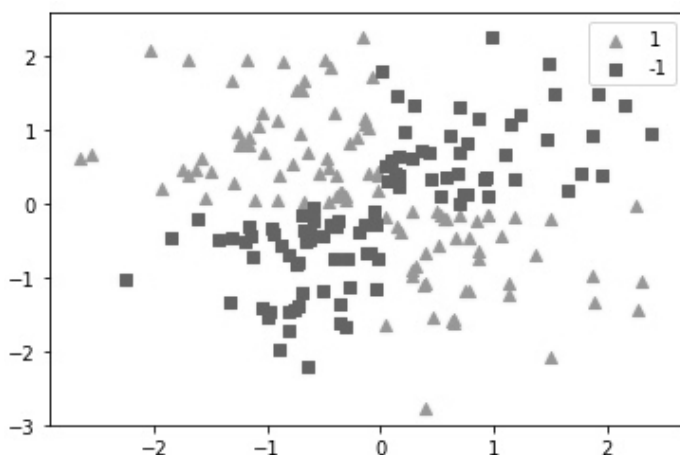


Рис. 2. Набор данных для нелинейной задачи классификации

Для решения поставленной задачи будем использовать Python-пакет Scikit-Learn (универсальная библиотека с открытым исходным кодом для анализа данных), в котором реализованы все основные алгоритмы машинного обучения. Применим класс SVC из библиотеки Scikit-Learn со следующими параметрами:

```
from sklearn.svm import SVC
svm = SVC(kernel='rbf', random_state=0, gamma=0.10, C=10.0)
```

Здесь `kernel` – ядро RBF; `gamma` – параметр ядра; `C` – параметр регуляризации SVC, управляющий зазором и общий для всех ядер метода SVM.

После обучения SVM с ядром радиальной базисной функции на демонстрационном наборе данных получим относительно хорошее разделение данных XOR (рис. 3):

```
from mlxtend.plotting import plot_decision_regions
svm.fit(X_xor, y_xor)
plot_decision_regions(X_xor, y_xor, clf=svm)
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```

10

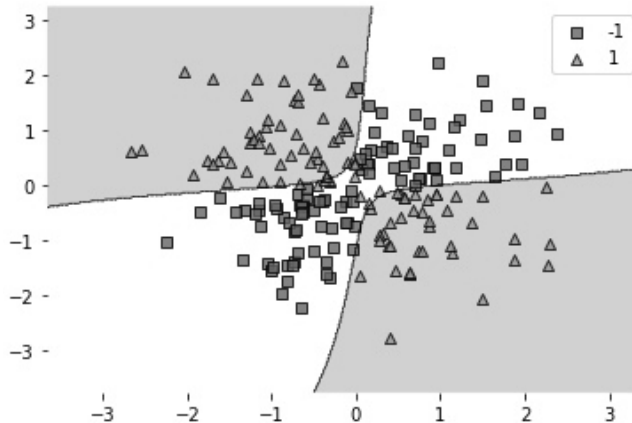


Рис. 3. Использование ядерного трюка для нахождения разделяющих гиперплоскостей

Параметр  $\gamma$  (gamma) является параметром отсека для гауссовой сферы. С ростом величины  $\gamma$  увеличивается охват обучающих образцов, что ведет к более мягкой границе решения.

**Наивные байесовские классификаторы** очень популярны в приложениях фильтрации спама в электронных сообщениях, так как имеют тенденцию обучаться быстрее других классификаторов. Классификатор называют «наивным», потому что он делает сильное статистическое предположение: признаки выбираются независимо от некоторого (неизвестного) распределения, по каждому признаку собираются простые статистики классов.

**Деревья принятия решений** — универсальные контролируемые модели обучения, которые имеют важное свойство — быть легко интерпретируемым. Этот алгоритм можно использовать как для классификации, так и для прогнозирования. Дерево решений представляет собой древовидную структуру в виде набора связанных узлов. Во многих задачах применяется бинарное дерево, каждый узел такого дерева разбивает данные на два множества с помощью порогового значения одного из информативных признаков. Дочерние подмножества далее рекурсивно разделяются на меньшие подмножества на основе других условий. Условия разделения автоматически выбираются на каждом шаге для наилучшего разбиения набора элементов.



Для того чтобы расщепить узлы в самых информативных признаках, определим в качестве целевой функции, которую необходимо оптимизировать алгоритмом обучения на основе дерева, *прирост информации* (information gain – IG) при каждом расщеплении:

$$IG(D_p, f) = I(D_p) - \sum_{j=1}^m \frac{N_j}{N_p} I(D_j), \quad (4)$$

где  $f$  – это признак, по которому выполняется расщепление;  $D_p$  и  $D_j$  – набор данных родительского и  $j$ -го дочернего узла;  $I$  – мера неоднородности;  $N_p$  – общее число образцов в родительском узле и  $N_j$  – число образцов в  $j$ -ом дочернем узле.

Прирост информации является мерой «чистоты» подмножеств, полученных в результате разделения. Из соотношения (4) видно, что IG – это разница между неоднородностью родительского узла и суммой неоднородностей дочерних узлов (чем меньше неоднородность дочерних узлов, тем больше прирост информации). Для уменьшения комбинаторного пространства поиска в большинстве библиотек (включая Scikit-Learn) реализованы бинарные деревья решений, то есть каждый родительский узел расщепляется на два дочерних узла.

В бинарных деревьях решений обычно используются три *меры неоднородности*, или критерия расщепления: мера неоднородности Джини ( $I_G$ ), энтропия ( $I_H$ ) и ошибка классификации ( $I_E$ ).

Энтропия для всех непустых классов  $p(i|t) \neq 0$  определяется следующим образом:

$$I_H(t) = - \sum_{i=1}^c p(i|t) \log_2 p(i|t),$$

где  $p(i|t)$  – это доля образцов, которая принадлежит классу  $i$  для отдельно взятого узла  $t$ . Энтропия равна 0, если все образцы в узле принадлежат одному и тому же классу, и энтропия максимальна, если распределение классов равномерное.

Мера неоднородности Джини определяется как критерий, который минимизирует вероятность ошибочной классификации:

$$I_G(t) = \sum_{i=1}^c p(i|t)(1 - p(i|t)) = 1 - \sum_{i=1}^c p^2(i|t).$$

Подобно энтропии, мера неоднородности Джини максимальна, если классы полностью перемешаны – например, в конфигурации с бинарными классами ( $c=2$ ):  $I_G(t) = 0,5$ . Однако на практике мера неоднородности Джини и энтропия, как правило, дают очень похожие результаты.

Еще одной мерой неоднородности является ошибка классификации:

$$I_E(t) = 1 - \max_i \{p(i|t)\}.$$



Этот критерий менее чувствителен к изменениям вероятностей классов в узлах.

Теперь, используя библиотеку Scikit-Learn, можно обучить дерево решений с максимальной глубиной 2 для набора данных «ирисы Фишера», применив в качестве критерия неоднородности энтропию (рис. 4). Соответствующий исходный код выглядит следующим образом:

12

```
from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier, plot_tree
import matplotlib.pyplot as plt
iris = load_iris()
X = iris.data[:, 2:] # длина и ширина лепестка
y = iris.target
tree_clf = DecisionTreeClassifier(criterion='entropy', max_depth=2)
tree_clf.fit(X, y)
plt.figure(figsize=((10,8)))
plot_tree(tree_clf, filled=True, feature_names=iris.feature_names[2:],
          class_names=iris.target_names, rounded=True)
plt.show()
```

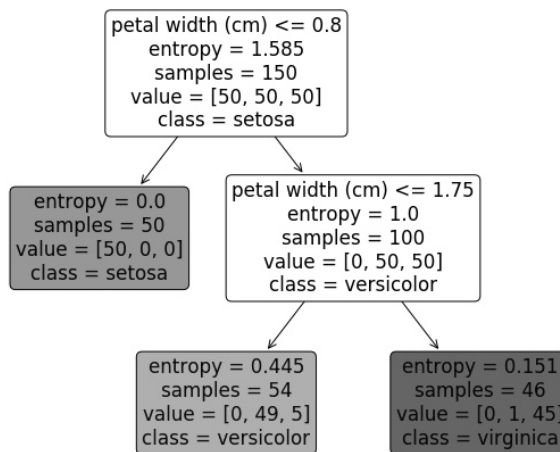


Рис. 4. Дерево принятия решений для набора данных «ирисы Фишера»

Важным качеством деревьев принятия решений является относительная простота объяснения результатов классификации или регрессии, поскольку каждое предсказание может быть выражено в серии логических условий, которые прослеживают путь от корня дерева до конечного узла.

**Случайный лес** — модель, состоящая из множества деревьев решений. Вместо того чтобы просто усреднять прогнозы разных деревьев (такая концепция называется просто «лес»), эта модель обучает группу классификаторов на основе деревьев принятия решений, задействовав для каждого отличающийся случайный поднабор обучающего набора.



В процессе обучения каждое дерево случайного леса учится на случайном образце из набора данных. Выборка образцов происходит с заменой (возвращением) — в статистике этот метод называется *бутстреппингом* (bootstrapping). Это дает возможность повторно использовать образцы одним и тем же деревом. При тестировании результат выводится путем усреднения прогнозов, полученных от каждого дерева. Подход, при котором каждый обучающийся элемент получает собственный набор обучающих данных (с помощью бутстреппинга), после чего результат усредняется, называется *бэггинг* (bagging, сокр. от bootstrap aggregating). Когда выборка выполняется без замены, такой метод называется вставкой или вклеиванием (pasting). После обучения каждого отдельного дерева решения общие предсказания случайных лесов делаются путем выбора статистического режима прогнозов отдельных деревьев для деревьев классификации (то есть каждое дерево «голосует») и среднего статистического значения прогнозов отдельных деревьев для деревьев регрессии. Однако повышенная сложность случайных лесов затрудняет анализ предсказаний по сравнению с одиночными деревьями решений.

Класс `RandomForestClassifier` из библиотеки `Scikit-Learn` имеет определенные параметры, которые либо уникальны для случайных лесов, либо особенно важны: параметр `n_estimators` задает число деревьев решений для включения в лес; параметр `max_features` определяет максимальное число отбираемых признаков; параметр `bootstrap` позволяет установить тип выборки — с заменой (настройка по умолчанию) или без замены.

Одиночные деревья принятия решений имеют тенденцию переобучаться под свои обучающие наборы, и случайные леса смягчают этот эффект, принимая среднее значение нескольких деревьев принятия решений, что обычно улучшает производительность модели. Кроме того, поскольку каждое дерево в случайном лесу может быть обучено независимо от всех других деревьев, распараллелить алгоритм обучения очень просто. Поэтому случайные леса крайне эффективны для обучения.

Еще одним замечательным качеством случайных лесов является то, что они позволяют легко измерить относительную важность каждого признака. `Scikit-Learn` измеряет важность признака путем выяснения, насколько узлы дерева, использующие этот признак, уменьшают загрязненность в среднем (по всем деревьям в лесу). Точнее, это взвешенное среднее, где вес каждого узла равен количеству связанных с ним обучающих образцов.

`Scikit-Learn` вычисляет эту оценку автоматически для каждого признака после обучения, а затем масштабирует результаты так, чтобы сумма всех значимостей была равна 1. Можно получить доступ к итоговому признаку с помощью переменной `feature_importances_`. Например, следующий код обучает `RandomForestClassifier` на наборе данных «ирисы Фишера» и выводит значение каждого признака:



```
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier
from sklearn.datasets import load_iris
iris = load_iris()
rnd_clf = RandomForestClassifier(n_estimators=500, n_jobs=-1)
rnd_clf.fit(iris["data"], iris["target"])
for name, score in zip(iris["feature_names"], rnd_clf.feature_importances_):
    print(name, score)
sepal length (cm) 0.112492250999
sepal width (cm) 0.0231192882825
petal length (cm) 0.441030464364
petal width (cm) 0.423357996355
```

14

Очевидно, что наиболее важными признаками являются длина лепестка (44 %) и ширина (42 %), в то время как значимость длины и ширины чашелистика по сравнению с ними намного ниже (11 % и 2 % соответственно).

**Нейронные сети.** Другим способом прогнозирования данных временных рядов является использование искусственных нейронных сетей, в частности рекуррентных нейронных сетей (recurrent neural network – RNN), которые уникально спроектированы для изучения тенденций и моделей при вводе временных рядов в целях классификации или прогнозирования.

Многослойный перцептрон (multilayer perceptron – MLP) относится к классу простых нейронных сетей прямого распространения, которые могут создавать нелинейные границы принятия решений. Для обучения MLP применяют *алгоритм обратного распространения ошибки*. Его можно описать как градиентный спуск, использующий автоматическое дифференцирование в обратном режиме. Для каждого обучающего образца алгоритм сначала вырабатывает прогноз (прямой проход), измеряет ошибку, затем проходит через каждый слой в обратном направлении, чтобы измерить вклад в ошибку каждой связи (обратный проход), и, наконец, немного подстраивает веса связей с целью уменьшения ошибки (шаг градиентного спуска). Чтобы этот алгоритм работал правильно, разработчики внесли ключевое изменение в архитектуру MLP: заменили ступенчатую функцию активации логистической функцией  $f(z) = 1 / (1 + \exp(-z))$ .

Нейронные сети применяются для построения очень сложных моделей, особенно в случае больших наборов данных. Однако, во-первых, они чувствительны к масштабированию данных, а во-вторых, требуется много времени для обучения таких моделей. Гибкость нейронных сетей также является одним из их главных недостатков: существует много гиперпараметров для подстройки. Можно не только применять любую воображаемую топологию сети (способ связывания нейронов друг с другом), но даже в простом MLP допускается изменять число слоев, количество нейронов на слой, тип функции активации, используемой в каждом слое, логику инициализации весов и др. Для нахождения наи-



лучшей комбинации значений гиперпараметров применяют два метода: решетчатый поиск и рандомизированный. Чтобы выполнить решетчатый поиск, необходимо задействовать класс `GridSearchCV` из библиотеки `Scikit-Learn`, передав ему набор параметров и значения, которые нужно опробовать. `GridSearchCV` оценит всевозможные комбинации значений гиперпараметров, применяя перекрестную проверку. Подход с решетчатым поиском хорош для небольшого числа комбинаций, но, когда пространство поиска гиперпараметров является большим, предпочтительнее воспользоваться рандомизированным поиском, который реализован классом `RandomizedSearchCV`. Этот класс можно применять почти так же, как и класс `GridSearchCV`, но, вместо того чтобы опробовать всевозможные комбинации, он оценивает заданное количество случайных комбинаций, выбирая случайное значение для каждого гиперпараметра на любой итерации.

15

Для контролируемого обучения необходимо разделить набор данных на обучающие и тестовые наборы. По сути, алгоритм машинного обучения берет в себя набор учебных материалов и выводит модель. Модель представляет собой алгоритм, который принимает новые точки данных в том же виде, что и данные обучения, и выводит предсказание. Все алгоритмы машинного обучения определяются тремя взаимозависимыми компонентами:

- 1) семейство моделей, в котором описывается множество моделей, из которых можно выбирать;
- 2) функция издержек, которая позволяет количественно сравнивать разные модели;
- 3) процедура оптимизации, выбирающая лучшую модель из множества.

### Обучение без учителя

Обучающие данные не помечены, система пытается обучаться без учителя. Если в контролируемом обучении система на маркированных тренировочных данных пытается извлечь модель, которая позволяет делать прогнозы о ранее не встречавшихся или будущих данных, то в неконтролируемом обучении система старается самостоятельно найти шаблоны непосредственно из набора данных. Основные алгоритмы обучения без учителя:

- а) кластеризация:
  - метод  $k$ -средних;
  - иерархический кластерный анализ;
  - максимизация ожиданий;
  - нейронная сеть Кохонена;
- б) визуализация и понижение размерности:
  - анализ главных компонент;
  - ядерный анализ главных компонент;
  - локальное линейное вложение;
  - стохастическое вложение соседей с  $t$ -распределением;
- в) обучение ассоциативным правилам.



*Метод k-средних* применяется к вещественным векторам, когда точно известно количество кластеров. Цель алгоритма — назначить каждую точку набора данных кластеру таким образом, чтобы сумма расстояний от каждой точки до центра кластера была минимальной. Здесь понятие «расстояние» является обычным евклидовым расстоянием в векторном пространстве:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} = \|X - Y\|.$$

В математических терминах алгоритм k-средних вычисляет кластерное назначение  $W: X \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , которое минимизирует внутрикластерную сумму квадратичных ошибок (SSE):

$$SSE = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \omega^{(i,j)} \|X^{(i)} - \mu^{(j)}\|^2,$$

где  $k$  — число кластеров;  $\mu^{(j)}$  — центры масс векторов  $X^{(i)} \in R^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\omega^{(i,j)} = 1$  в случае, если образец  $X^{(i)}$  находится в группе  $j$ , и  $\omega^{(i,j)} = 0$  в противном случае. Значение SSE иногда также называется «инерцией» кластера.

*Иерархический кластерный анализ* используется для группировки непомеченных точек данных, имеющих сходные характеристики. Существует два основных подхода к иерархической кластеризации: дивизивный (разделяющий) и агломеративный (объединяющий). Дивизивный алгоритм начинается с единственного кластера, который охватывает все образцы и итеративно расщепляет кластер на более мелкие, пока каждый кластер не будет содержать всего один образец. В агломеративном алгоритме принят противоположный подход: каждый образец рассматривается как отдельный кластер, далее алгоритм объединяет ближайшие пары кластеров.

Агломеративная иерархическая кластеризация представлена двумя стандартными алгоритмами: методом одиночной связи (single linkage) и методом полной связи (complete linkage). Используя метод одиночной связи для каждой пары кластеров вычисляются расстояния между самыми похожими членами и объединяются два кластера, для которых расстояние между самыми похожими членами наименьшее. Подход на основе полной связи подобен методу одиночной связи, но в каждой паре кластеров сравниваются наиболее различающиеся члены для объединения.

Результаты работы иерархических алгоритмов обычно представляются в виде дендрограммы, построенной по сжатой матрице расстояний [3].

*Анализ главных компонент* (principal component analysis — PCA) — это метод линейного преобразования, который широко используется в самых разных областях, чаще всего для снижения размерности. Алгоритм PCA определяет ось, на долю которой приходится самая крупная





величина дисперсии в обучающем наборе. Он также находит вторую ось, ортогональную к первой, на долю которой приходится самая крупная величина оставшейся дисперсии, и т.д. При проекции на такие оси (снижении размерности) сохраняется наибольшее количество информации. Ортогональные оси (главные компоненты) нового подпространства можно интерпретировать как направления максимальной дисперсии при условии, что оси новых признаков ортогональны друг другу. Класс PCA из библиотеки Scikit-Learn реализует метод PCA с использованием сингулярного разложения SVD. Следующий код применяет PCA для уменьшения размерности набора данных до двух измерений (алгоритм автоматически выполняет центрирование данных):

```
from sklearn.decomposition import PCA
pca = PCA(n_components = 2)
X2D = pca.fit_transform(X)
```

После подгонки преобразователя PCA к набору данных можно обращаться к главным компонентам с помощью переменной `components_`, которая хранит их в виде горизонтальных векторов, поэтому, например, первым главным компонентом будет `pca.components_[0]`.

Более того, ядерный трюк может быть применен к PCA, что позволяет выполнять сложные нелинейные проекции для понижения размерности. Этот алгоритм называется ядерным PCA (kPCA). Например, следующий код использует класс `KernelPCA` из библиотеки Scikit-Learn для выполнения kPCA с ядром RBF:

```
from sklearn.decomposition import KernelPCA
rbf_pca = KernelPCA(n_components = 2, kernel='rbf', gamma=0.04)
X_reduced = rbf_pca.fit_transform(X)
```

**Обучение на базе многообразий (manifold learning)** — это класс алгоритмов без учителя, нацеленных на описание наборов данных как низкоразмерных многообразий, вложенных в пространство большей размерности.

1. *Метод t-SNE* (t-distributed stochastic neighbor embedding — распределенное стохастическое соседнее вложение) используется для визуализации отображения пространства высокой размерности в пространство меньшей размерности. Алгоритм t-SNE начинается с преобразования многомерного евклидова расстояния между точками в условные вероятности, отражающие сходство точек:

$$p_{ji} = \frac{\exp\left(-\|x_i - x_j\|^2 / 2\sigma_i^2\right)}{\sum_{k \neq i} \exp\left(-\|x_i - x_k\|^2 / 2\sigma_i^2\right)},$$

где среднеквадратичное отклонение  $\sigma_i$  — параметр, который нужно оптимизировать.



Теперь определим матрицу сходства для исходного набора данных как симметричный вариант условной вероятности:

$$p_{ij} = \frac{p_{j|i} + p_{i|j}}{2N}. \quad (5)$$

Также определим матрицу сходства для точек отображения:

$$q_{ij} = \frac{f(|x_i - x_j|)}{\sum_{k \neq i} f(|x_i - x_k|)} \quad \text{с} \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2}. \quad (6)$$

18

Здесь применяется такой же подход, как и для точек данных, но используется другое распределение (распределение Стьюдента с одной степенью свободы или распределение Коши вместо гауссова распределения). Алгоритм t-SNE стремится к тому, чтобы две эти матрицы были максимально близкими, это соответствует минимизации расстояния Кульбака – Лейблера между распределениями (5) и (6):

$$KL(P|Q) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}.$$

2. *Многомерное шкалирование (MDS)* понижает размерность, одновременно пытаясь сохранить расстояния между образцами.

3. *Изометрическое отображение (Isomap)* создает граф, соединяя каждый образец с его ближайшими соседями, а затем понижает размерность, пытаясь сохранить геодезические расстояния между образцами (геодезическое расстояние между двумя узлами в графе представляет собой количество узлов на кратчайшем пути между этими узлами).

*Локально-линейные методы* снижения размерности базируются в основном на сохранении свойств в малых окрестностях точек.

Например, вот как работает метод *локально линейного вложения (LLE)*: сначала для каждого обучающего образца  $x^{(i)} \in R^n$  алгоритм идентифицирует его  $k$ -ближайших соседей, а затем пытается восстановить  $x^{(i)}$  как линейную функцию этих соседей. Более конкретно, он находит такие веса  $w_{i,j}$ , которые минимизируют сумму квадратичных ошибок:

$$\hat{W} = \arg \min_w \sum_{i=1}^N \left( x^{(i)} - \sum_{j=1}^N w_{i,j} x^{(j)} \right)^2$$

при условии

$$\begin{cases} w_{i,j} = 0, x^{(j)} \notin S_k^{(i)}, \\ \sum_{j=1}^N w_{i,j} = 1, i = 1, 2, \dots, N' \end{cases}$$



где  $W$  — матрица весов, содержащая все веса  $w_{i,j}$ ;  $S_k^{(i)}$  — множество  $k$ -ближайших соседей  $x^{(i)}$ . Второе ограничение нормализует веса для каждого обучающего образца  $x^{(i)}$ .

После этого шага матрица весов  $\hat{W}(\hat{w}_{i,j})$  представляет локальные линейные связи между обучающими образцами. Теперь второй шаг — отобразить обучающие образцы на  $d$ -мерное пространство (где  $d < n$ ) с одновременным сохранением как можно большего числа имеющихся локальных связей. Если  $z^{(i)}$  является образом  $x^{(i)}$  в этом  $d$ -мерном пространстве, то необходимо минимизировать квадрат расстояния между  $z^{(i)}$  и  $\sum_{j=1}^N \hat{w}_{i,j} z^{(j)}$ . Таким образом, получаем задачу безусловной оптимизации:

$$\hat{Z} = \arg \min_z \sum_{i=1}^N \left( z^{(i)} - \sum_{j=1}^N \hat{w}_{i,j} z^{(j)} \right)^2,$$

где  $Z$  — это матрица, содержащая все  $z^{(i)}$ . Это очень похоже на первый шаг, но, вместо того чтобы фиксировать образцы и находить оптимальные веса, делаем обратное: фиксируем веса и находим оптимальное положение отражений образцов в пространстве с более низким числом измерений.

**Обучение ассоциативным правилам.** Выявление закономерностей между связанными событиями может быть использовано для понимания природы анализируемых данных. Основные меры поиска ассоциативных правил: поддержка (support) — частота появления правила, достоверность (confidence) — показатель, характеризующий уверенность в том, что правило на самом деле верное (оценка условной вероятности).

### Обучение с подкреплением

Обучающая система или программный агент может наблюдать, выбирать и выполнять действия внутри среды (среда — это замкнутый физический или виртуальный объект), получая в ответ награды или штрафы в форме отрицательных наград. Затем агент должен определить наилучшую стратегию, называемую политикой, для получения максимальной награды [1]. Например, политикой может быть нейронная сеть, которая на входе принимает наблюдения и выдает действие, подлежащее выполнению, по оценочным вероятностям для каждого действия (рис. 5). Другие способы исследования пространства политик связаны с использованием генетических алгоритмов и градиентных методов для определения оптимальной политики.

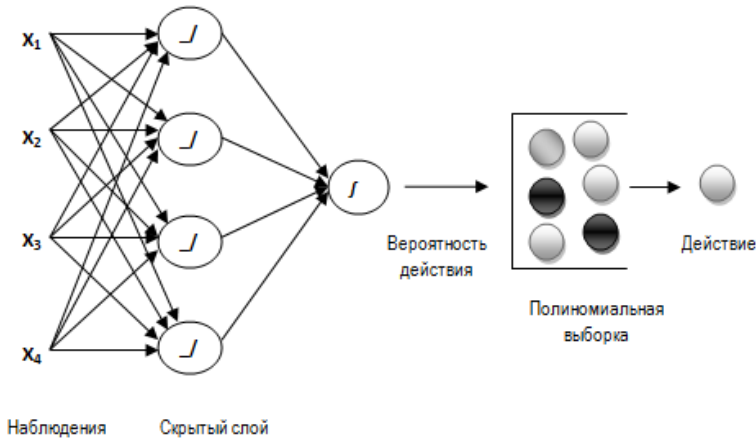


Рис. 5. Политика в форме нейронной сети

**Марковские системы принятия решений.** Марковский процесс принятия решений состоит из множества состояний  $S$ , множества действий  $A$ , функции перехода  $T(s,a,s')$  из состояния  $s$  в состояние  $s'$  при условии, что агент выбрал действие  $a \in A$  и функции вознаграждения  $R(s,a,s')$  для этого перехода. Для марковского процесса справедливо утверждение: вероятности переходов между состояниями не зависят от истории предыдущих переходов.

Оценка оптимальной ценности  $V^*(s)$  состояния, предложенная Р. Беллманом, представляет собой ожидаемую суммарную прибыль с учетом дисконтной ставки  $\gamma$ :

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} T(s,a,s') \{R(s,a,s') + \gamma \cdot V^*(s')\}.$$

Обозначим через  $\pi(a,s)$  вероятность выбора действия  $a \in A$  в состоянии  $s$ ,  $Q^*(s,a)$  — оптимальная  $Q$ -ценность пары «состояние — действие»  $(s,a)$ . Тогда, если агент будет следовать оптимальной стратегии  $\pi(a,s)$ , то для всех пар  $(s,a)$  справедливо:

$$Q_{k+1}(s,a) \leftarrow \sum_{s'} T(s,a,s') \left\{ R(s,a,s') + \gamma \cdot \max_a Q_k(s',a) \right\}. \quad (7)$$

Выбор оптимальной политики определяется из подсчитанных значений  $Q^*(s,a)$ :

$$\pi^*(s) = \arg \max_a Q^*(s,a). \quad (8)$$

Данный подход (7), (8) был адаптирован для поиска оптимального маршрута передвижения мобильного агента в условиях дорожного движения и сохранения конфиденциальности его местоположения [4].



Коммуникационные возможности мобильных устройств позволяют отслеживать местоположение мобильных агентов по их уникальному идентификатору путем прослушивания сети.

Предположим, что злоумышленник имеет ограниченное число прослушивающих станций для расположения в сети с целью обнаружения мобильных агентов на перекрестках. Ограничение на количество прослушивающих станций связано с затратами на установку каждой станции.

Для обеспечения своей конфиденциальности мобильные агенты могут использовать несколько уникальных идентификаторов. Смена идентификаторов происходит в зонах смешивания, которые требуют определенных затрат – стоимости смены псевдонимов и пребывания в состоянии молчания для мобильного агента [5].

В моделируемой конфликтной ситуации, основанной на теоретико-игровом взаимодействии мобильных агентов и злоумышленника, при расчете ценности состояний вводятся некоторые определенные правила в качестве исходных данных для выбора оптимальной стратегии [4].

Предположим, что  $a$  – действие, выполняемое в состоянии  $s$  (выбор пути). Оно определяется следующим образом (рис. 6):

$$a = \begin{cases} 0,8 = \text{const} & \text{для выбранного направления движения,} \\ 0,1 = \text{const} & \text{для всех остальных возможных вариантов.} \end{cases}$$

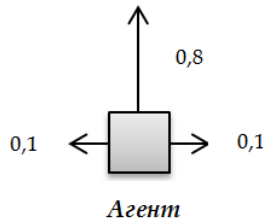


Рис. 6. Действие  $a$ , выполняемое агентом в состоянии  $s$

Применим метод Беллмана для связанного графа, представленного на рисунке 7.

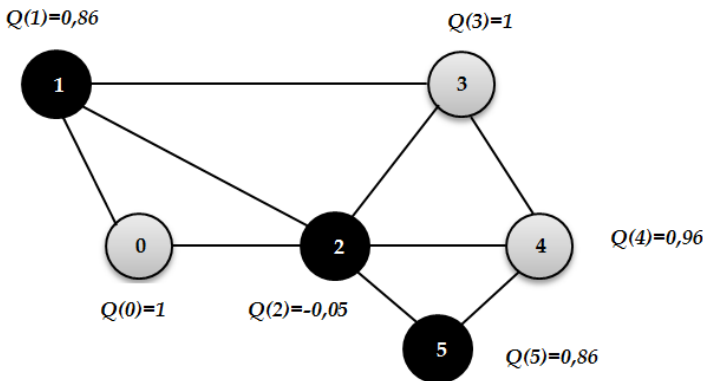


Рис. 7. Ценности состояний в связанном графе,  $\gamma = 1$  и  $R(s) = -0,04$



Для оценивания предлагаемого метода Беллмана были рассмотрены следующие алгоритмы: Дейкстры, Флойда – Уоршелла. Среднее время выполнения алгоритмов оптимизации приведено в таблице.

#### Сравнение разработанных алгоритмов по скорости

Процессор	Метод	Алгоритм	Алгоритм
AMD Athlon II X4 630 2,8 ГГц	Беллмана	Дейкстры	Флойда – Уоршелла
Среднее время поиска	0,821 с	0,648 с	0,810 с

22

Классические алгоритмы поиска выдали путь 0-2-3 (рис. 7), так как расстояние между этими узлами минимальное. Это ведет к раскрытию агента, поскольку он проходит через перекресток, на котором с большой долей вероятности находится прослушивающая станция  $Q(2) = -0,05$ . Алгоритм Беллмана предложил маршрут 0-2-4-3, так как ценность данного маршрута максимальна: агент меняет идентификатор в зоне смешивания  $Q(4) = 0,96$ , чтобы безопасно достичь цели в вершине 3. При этом реализация метода Беллмана не сильно уступает реализации алгоритма Дейкстры по скорости, находясь на том же уровне, что и алгоритм Флойда – Уоршелла [4].

#### Список литературы

1. Жерон О. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем. СПб., 2018.
2. Катковник В.Я., Полетаева Н.Г. Принцип максимума эмпирического правдоподобия для выбора параметра сглаживания в непараметрических оценках плотности // Вопросы кибернетики. Актуальные задачи адаптивного управления. М., 1982. Вып. 89. С. 90 – 102.
3. Раука С. Python и машинное обучение. М., 2017.
4. Васильев С.П., Полетаева Н.Г. Применение методов машинного обучения в задачах оптимизации // Информационные системы и технологии: теория и практика : сб. науч. тр. СПб., 2019. Вып. 11. С. 28 – 40.
5. Buttyan L., Holczer T., Vajda I. On the effectiveness of changing pseudonyms to provide location privacy in VANETs // Proceedings of 4th European Workshop on Security and Privacy in Ad-hoc and Sensor Networks. Cambridge, 2007. P. 129 – 141.

#### Об авторе

Наталья Григорьевна Полетаева – канд. техн. наук, ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.  
E-mail: spur49@mail.ru

#### The author

Dr Natalya G. Poletaeva, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.  
E-mail: spur49@mail.ru

*С. Н. Ткаченко, А. М. Ставицкий, И. С. Маклахова*

## НЕФИНАНСОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ И УДЕРЖАНИЯ КЛИЕНТОВ В БАНКОВСКОЙ СФЕРЕ

*Рассмотрены основные механизмы нефинансового привлечения и удержания клиентов в банковской сфере. Проанализированы такие факторы, как удобство приложения банка, скорость и качество решения проблемы клиента, технологические аспекты работы банка, специальные клиентские программы и привилегии, доступность банковских инструментов. Сформулированы действия для повышения лояльности клиентов банков.*

23

*The paper considers the main mechanisms of non-financial attraction and customer retention in the banking sector. The following factors are analyzed: convenience of the bank application; speed and quality of solving customer problems; technological aspects of the bank; special client programs and privileges; the availability of banking tools. Formulated actions to increase customer loyalty of banks.*

**Ключевые слова:** банк, лояльность, клиент, привлечение и удержание клиента.

**Keywords:** bank, loyalty, customer, customer attraction and retention.

### Введение

Последние исследования, посвященные лояльности пользователей банковского сектора [1], показывают снижение доверия клиентов к банкам и рост интереса к технологическим компаниям, которые устремились в финансовую сферу. Также обостряется борьба за клиента между банками, поскольку в развитых странах наблюдается естественное снижение численности населения.

При этом ключевыми факторами, влияющими на успех в конкурентной борьбе, являются лояльность клиента и его удовлетворенность процессом взаимодействия с банком. Помимо традиционной составляющей эффективности банка (уровень процентных ставок по кредитам, доходность вкладов и т. д.), на эти факторы влияет еще и нефинансовая часть. Причем доля второй составляющей, как правило, превышает долю первой в процессе выбора или смены финансовой организации.

Согласно правилу Парето, 20 % клиентов дают 80 % прибыли. Поэтому механизмы удержания клиентов важнее мероприятий по привлечению новых. Из банковской практики известно, что привлечение нового клиента требует в несколько раз больше ресурсов, чем удержание имеющегося [2]. Также ввиду большого количества банков и излишней закредитованности населения Российской Федерации рост клиентской базы затруднен.



Кредитно-денежная политика, проводимая в настоящее время Центральным Банком Российской Федерации, также не способствует увеличению денежной массы и снижению ключевой ставки. При этом в условиях высоких инфляционных ожиданий населения наблюдается снижение доверия к банковской сфере в целом из-за невозможности сохранения накоплений.

Таким образом, все большее значение приобретает качество клиентской политики банка и включение в нее нефинансовых механизмов привлечения и удержания клиентов, рассмотрению ряда которых и посвящена настоящая работа.

### Нефинансовые механизмы привлечения и удержания клиентов

Под клиентской политикой банка понимаются стратегические и тактические шаги по работе с клиентами, принципы организации подобного взаимодействия, ресурсы и направления их использования с целью совершенствования взаимодействия с клиентской базой.

Суммарный доход от взаимоотношений с одним банковским клиентом имеет нелинейный рост в зависимости от продолжительности данных отношений. Например, затраты на обслуживание существующих клиентов всегда ниже, чем на обслуживание нового клиента, так как на работу с постоянными клиентами тратится существенно меньше времени. Также постоянные клиенты гораздо охотнее соглашаются на новые предложения и продукты банка, что приносит дополнительный рост доходности на одного клиента.

Общим понятием, демонстрирующим предпочтение одного банка перед другим, является лояльность клиента. Лояльный клиент, например, может заключить кредитный договор по более высокой процентной ставке по сравнению с банком-конкурентом, предпочитая свой банк из-за других факторов. Сам факт лояльности клиентов к своему банку может привлекать клиентскую базу из конкурирующих финансовых организаций.

Одним из основных показателей лояльности является пожизненная ценность клиента (CLV), которая рассчитывается по формуле [3]

$$CLV = t \cdot c \cdot f,$$

где  $t$  — продолжительность взаимодействия с клиентом;  $c$  — средняя стоимость покупок клиента за время взаимодействия;  $f$  — частота совершения покупок за единицу времени.

Более сложный вариант расчета CLV предложен в [4], где рассматривается лояльность клиента в течение одного года:

$$CLV - GS \cdot \sum_{i=1}^n \frac{r^i}{(1+d)^i} - M \sum_{i=1}^n \frac{r^{i-1}}{(1+d)^{i-0.5}},$$

где  $GS$  — чистый доход с одного клиента в год;  $M$  — затраты на его удержание за аналогичный период;  $n$  — горизонт взаимодействия в годах;  $d$  — годовая ставка дисконтирования.





Как видно из данных формул, ключевым параметром, влияющим на лояльность, является продолжительность взаимодействия между компанией (банком) и ее клиентом. К числу факторов, которые оказывают влияние на продолжительность этих отношений, можно отнести следующие:

- финансовые – управление линейкой банковских вкладов и займов;
- нефинансовые – менеджмент взаимоотношений между экосистемой банка и клиентом.

Среди нефинансовых показателей, влияющих на потребительскую ценность банковских услуг, можно выделить:

- удобство приложения банка;
- скорость и качество решения проблемы клиента;
- технологические аспекты работы банка;
- специальные клиентские программы и привилегии;
- доступность банковских инструментов и др.

**Приложение банка.** Концепция *mobile first* (приоритет мобильных устройств перед ПК) приводит банки к необходимости разработки своего мобильного приложения. Соответственно, появляется опыт его использования клиентами банка, на основе которого формируется представление об удобстве или неудобстве данного программного продукта. По сути, удобство приложения – это интегральная характеристика, показывающая насколько быстро и при меньшем количестве ошибок можно выполнить ту или иную операцию / действие. Для обеспечения этого удобства необходимо внимательно прислушиваться к пожеланиям пользователей, постоянно тестировать новые функции, сохранять общие принципы работы программного продукта.

Именно через приложение начинается адаптация клиента в банке. На начальном этапе он знакомится с особенностями работы конкретного банка. В это же время полезно будет показать заботу об уровне осведомленности клиента и его финансовой грамотности. Поэтому одним из разделов приложения может быть ликбез по финансовой культуре. Это позволит сформировать запрос от клиента на качество банковских услуг. И когда пользователь будет видеть, что услуги и уровень сервиса его банка соответствуют общим стандартам, то у него будет меньше стимулов уйти к конкурентам.

**Скорость и качество решения проблем.** При обращении в банк клиент обычно ожидает, что его вопрос будет решен в кратчайшие сроки, желательно – непосредственно в день обращения. При этом вопрос должен быть решен таким образом, чтобы не потребовалось повторных обращений и дополнительных действий со стороны клиента.

Несмотря на очевидность данных требований, во многих финансовых организациях наблюдается некомпетентность персонала. Сотрудники банков часто допускают неточности, рассказывая об услугах банка, и тем самым вводят клиентов в заблуждение, что приводит к потере времени. Не все менеджеры хорошо и полно разбираются в инструментах своего банка, часто не понимают сути предлагаемых клиентам продуктов, иногда предлагают выполнить ошибочные операции, не относящиеся к задаче клиента. Одно из решений этой проблемы – постоянное обучение своих сотрудников и разработка системы мотивации персонала для самообучения и повышения компетентности.



Текучка кадров также отрицательно сказывается на скорости и качестве обслуживания клиентов. Менеджеры всех уровней должны быть мотивированы на длительные трудовые отношения, поскольку только так можно обеспечить качественный сервис.

Еще одним важным аспектом взаимоотношений между банком и клиентом является совершенствование процесса информирования, когда без значительной потери скорости обслуживания пользователь получает информацию о новых продуктах банка и коммерческих предложениях непосредственно во время решения своей проблемы.

Для этого используется принцип сегментации – разделение клиентской базы на сегменты, выделение из них приоритетных и создание уникальных предложений для каждой группы. Чем мельче сегментация, тем сложнее работать с разнообразной клиентурой, но повышается эффективность взаимодействия и вероятность отклика на предложение от банка.

Подобная практика также снижает время, потраченное клиентом банка на знакомство с новыми продуктами. Банк, со своей стороны, получает более лояльных клиентов, которые чувствуют индивидуальный подход. Идеальным вариантом является случай «один клиент – одна стратегия взаимодействия».

*Технологические аспекты* работы банка связаны с его информационной системой. К ней обычно предъявляются противоречивые требования: она должна быть безопасной, но при этом открытой; уникальной, но при этом легко масштабируемой и т. д.

Очевидно, что большинство клиентов банка не знакомы с техническими особенностями функционирования автоматизированных информационных систем, однако положительный информационный фон и отсутствие фактов нарушений информационной безопасности формируют позитивное впечатление у клиентов банка.

*Клиентские программы и привилегии.* Наличие привилегированных групп клиентов в банке является уже обычной практикой. Критерием для перехода в VIP-категорию служит наличие средств в количестве 1 миллиона рублей на счете клиента. Для небольших городов данная планка может быть снижена. Также возможна покупка привилегированного статуса.

Клиенты премиального сегмента часто потребляют услуги определенного типа, поэтому важно проводить постоянный анализ расходов данной категории клиентов. Например, для тех, кто часто бывает за границей, возможно введение индивидуальных предложений в виде промоакций от сетевых отелей. Это будет выгодно и банку, и гостинице, и самому физическому лицу. Другой вариант: ориентация на здоровый образ жизни и правильное питание. Подобных клиентов также можно идентифицировать на основе анализа их расходов. Персонифицированные предложения для постоянных клиентов магазинов спортивного питания и инвентаря, фитнес-клубов, дифференцированный cash-back повысят лояльность клиента.



Поздравление с общенациональными, профессиональными и личными праздниками также приводит к формированию положительного имиджа финансовой организации в глазах клиента. При этом возможны подарки от партнеров, что также формирует поток лидов на их площадку.

Еще одной программой нефинансового стимулирования клиентов является бонусная программа. Клиенту она позволяет получать скидки в определенных магазинах или возврат средств при безналичном расчете, а для банка это ценный источник данных о человеке, его текущих потребностях. Знание предпочтений клиента, в свою очередь, позволяет сделать ему индивидуальное коммерческое предложение. Таким образом, различные инструменты начинают работать сообща, дополняя друг друга.

Еще одним рассматриваемым механизмом является *доступность банковских продуктов и инструментов*. Прежде всего клиентов интересует территориальная доступность, то есть возможность найти отделение банка / банкомат или воспользоваться банкоматом банка-партнера. Для этого одни банки расширяют свою филиальную сеть, другие объединяются в консорциумы и регулируют распространение уже консорциума, а не отдельного банка.

Уровень обслуживания в различных филиалах банка не должен отличаться друг от друга, поскольку клиент вправе рассчитывать на одинаковый уровень сервиса вне зависимости от своего географического положения. На сегодняшний день «банк в телефоне» частично снимает проблему зависимости квалификации персонала от региона.

Тем не менее именно с географической зависимостью банковских услуг чаще всего сталкиваются клиенты. Внутрибанковские расчеты до сих пор могут облагаться комиссией, отделения могут не «видеть» друг друга в единой информационной системе, банки могут взимать с клиентов плату за пользование банкоматами, если карта выпущена в другом регионе.

Актуальна также проблема очередей — как в отделениях банка, так и среди VIP-клиентов к своему персональному менеджеру. Зачастую причиной подобных проблем является отсутствие системного подхода к управлению центральным аппаратом и филиалами банка.

## Выводы

Для повышения лояльности клиентов банкам необходимо выполнять ряд действий, связанных с рассмотренными механизмами:

- 1) формирование большого количества сегментов клиентов и разработка маркетинговых предложений для каждого из них. По сути, это означает создание отделов маркетинга под каждый сегмент. Специалисты каждого из отделов будут заниматься предложениями только для своих клиентов, хорошо понимая их нужды;

- 2) разработка персональных предложений на основе анализа данных, полученных с учетом движения средств на счетах клиента. Для



сбора этих данных необходимо внедрение единой информационной системы, фиксирующей все операции и действия клиента. Обязательным требованием к подобной системе должна быть ее гибкость, так как иначе невозможно будет персонифицировать отдельные группы клиентов;

3) помимо развития профессионализма персонала банка, важно в процессе взаимодействия с клиентом формировать его позитивное отношение к компании. Для этого требуется учет многих факторов пользовательского поведения на основе статистических данных. Например, отсутствие агрессивного маркетинга само по себе является положительной чертой, повышающей лояльность;

4) разумный баланс между дистанционным обслуживанием и доступностью филиалов / отделений банка как мест для консультаций всегда будет положительно сказываться на отношении к банку его клиентов;

5) программы по подготовке кадров и повышению качества их работы также положительно скажутся на лояльности. Работа с негативными реакциями и разбор жалоб в публичном пространстве всегда говорят об открытости финансовой организации;

6) развитие премиального сегмента и его дифференциация позволит аккумулировать ресурсы на наиболее перспективных клиентах;

7) еще одним из возможных направлений развития является формирование имиджа банка как пространства для встреч и консультаций, повышающих доступность банковских инструментов.

### Список литературы

1. *Toit du G., Bradley K., Swinton S. et al.* In Search of Customers Who Love Their Bank. URL: <https://www.bain.com/insights/in-search-of-customers-who-love-their-bank-nps-cx-banking/> (дата обращения: 04.09.2019).
2. *Reichheld F.* The Loyalty Effect: The Hidden Force Behind Growth, Profits, and Lasting Value. Harvard Business Press, 1996.
3. *Farris P., Bendle N., Pfeifer P., Reibstein D.* Marketing Metrics: The Definitive Guide to Measuring Marketing Performance. Pearson Education, 2010.
4. *Berger P., Nasr N.* Customer lifetime value: Marketing models and applications // *Journal of Interactive Marketing.* 1998. Vol. 12, iss. 1. P. 17–30.

### Об авторах

Сергей Николаевич Ткаченко — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: tkasergey@yandex.ru

Александр Матвеевич Ставицкий — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: tkasergey@yandex.ru

Ирина Сергеевна Маклахова — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: imaklakhova@mail.ru



### **The authors**

Dr Sergey N. Tkachenko, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: tkasergey@yandex.ru

Dr Alexander M. Stavitsky, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: tkasergey@yandex.ru

Irina S. Maklahova, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: imaklakhova@mail.ru

*С. В. Поршнев, О. А. Пономарева, Э. В. Соломаха*

## КАРТОГРАФИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ IP-АДРЕСОВ

30

*В связи с непрерывно увеличивающимся числом сетевых атак и, соответственно, объемов работ, выполняемых специалистами-аналитиками, по выявлению лиц, нарушающих безопасность объектов критической информационной инфраструктуры, разработка программных инструментов, обеспечивающих визуализацию анализируемой при этом информации, является актуальной. В статье описан картографический модуль, обеспечивающий по заданному IP-адресу поиск в общедоступных БД компаний MaxMind, БД 3WiFi, WHOIS информации о данном IP-адресе, визуализацию его местоположения на электронной географической карте и текстовую информацию о стране и городе его нахождения, а также провайдере, предоставившем данный IP-адрес. Данный модуль реализован в виде web-сервера с помощью веб-фреймворка Django. Приведен пример, иллюстрирующий выбранные способы визуализации информации, относящейся к выбранному IP-адресу. Определены направления его дальнейшего развития.*

*Due to the continuously increasing number of network attacks and, accordingly, the volume of work performed by analysts to identify individuals who violate the security of critical information infrastructure objects, the development of software tools that provide visualization of the information analyzed in this case is relevant. A cartographic module is described that provides a search for publicly accessible databases of MaxMind companies, 3WiFi databases, WHOIS information for this IP-address, visualization of its location on an electronic geographic map and text information about the country and city of its location using the specified IP-address, as well as the provider that provided this IP-address. This module is implemented as a WEB server using the Django web framework. An example is provided illustrating selected methods for visualizing information related to a selected IP-address. The directions of its further development are determined.*

**Ключевые слова:** IP-адрес, сетевая атака, база данных, географическая карта.

**Keywords:** IP-address, network attack, database, geographical map.

### Введение

Анализ общедоступных статистических данных, размещаемых в том числе на сайте лаборатории Касперского [1], свидетельствует о непрерывном увеличении числа предпринимаемых сетевых атак, несмотря на существующие многочисленные технические решения для защиты



пользовательских информационных ресурсов от вредоносных воздействий. Например, сравнение числа зарегистрированных лабораторией Касперского атак в течение 2018 и 2019 гг. обнаруживает более чем двукратное увеличение числа среднемесячных атак: с 1 млн атак до 2 и более млн в сутки, часть из которых оказались успешными.

Для анализа возникающих угроз ИБ той или иной компьютерной сети и прогнозирования вероятных направлений следующих действий злоумышленника специалисту-аналитику, занимающемуся вопросами противодействия сетевым атакам, необходимо иметь информацию о координатах местоположения IP-адреса, с которого предпринята попытка атаки (соответственно, стране и городе, в котором он находится), а также информацию о провайдере, владеющем данным IP-адресом.

В этой связи разработка программного инструмента, обеспечивающего визуализацию на электронных картах местоположения IP-адреса и вывод соответствующей текстовой информации, оказывается актуальной. В статье обсуждается разработанный картографический модуль для визуализации местоположения IP-адресов и отображения актуальной текстовой информации о данном IP-адресе.

### Источники информации об IP-адресах

Для разработки картографического модуля были использованы следующие источники.

1. Базы данных (БД) компании *MaxMind* [4], для доступа к которым использовалось приложение *MaxMind DB Python Module* [5]:

а) *GeoIP2-City*, содержащая информацию о принадлежности IP-адресов городам с указанием почтового индекса, страны и континента;

б) *GeoIP2-Connection-Type*, содержащая информацию, позволяющую по IP-адресу идентифицировать тип подключения посетителей вашего сайта;

в) *GeoIP2-Country*, содержащая информацию, позволяющую идентифицировать страну, которой принадлежит IP-адрес;

г) *GeoIP2-ISP*, содержащая информацию, позволяющую идентифицировать провайдера услуг Интернета, название организации, протокол, используемый для подключения к сети интернет, IP-адрес провайдера.

2. БД 3WiFi [6], содержащая информацию о беспроводных точках доступа в Интернет. Данный ресурс поддерживается и наполняется сообществом пользователей (технология краудсорсинга), осуществляющих сканирование беспроводных точек доступа в Интернет.

3. БД WHOIS [7] интернет-регистратора RIPE NCC, отвечающего за Европейский регион и часть Азиатского [3].

Содержание контента основных полей обсуждаемых БД представлено в таблице.



## Содержание контента основных полей, используемых БД

База данных	Содержание контента
GeoIP2-City	континент
	страна регистрации
	область
	город
	почтовый индекс
	географические широта и долгота
GeoIP2-Connection-Type	континент
	страна
	страна регистрации
	тип подключения
GeoIP2-Country	континент
	страна
	страна регистрации
GeoIP2-ISP	провайдер
	организация
3WiFi	дата добавления информации о точке беспроводного доступа в Интернет в БД
	принадлежность к диапазону IP-адресов / 16
	MAC-адрес сети точки доступа
	имена сети точки доступа
	тип защиты точки доступа
	ключ сети
географические широта и долгота	
WHOIS	континент
	страна
	город
	локация
	провайдер

## Структурная схема картографического модуля

Структурная схема картографического модуля представлена на рисунке 1. В первую очередь для разрабатываемого картографического модуля была создана структурная схема, отображающая взаимосвязь отдельных компонентов модуля.

Из рисунка 1 видно, что взаимодействие пользователя с картографическим модулем обеспечивает web-сервер, разработанный с использованием веб-фреймворка *Django* [9], который является инструментом быстрой разработки сайтов.

Сервер обеспечивает создание запроса и осуществляет поиск информации, релевантной данному запросу, в одной из описанных в предыдущем разделе БД.

Для отображения местоположения IP-адреса на географической карте с помощью библиотеки *Leaflet* [2] web-сервер обращается к ло-





кальному хранилищу карт, в котором хранятся электронные географические карты, загруженные с ресурса *OpenStreetMap* [3]. Технология создания подобных хранилищ описана в [10].

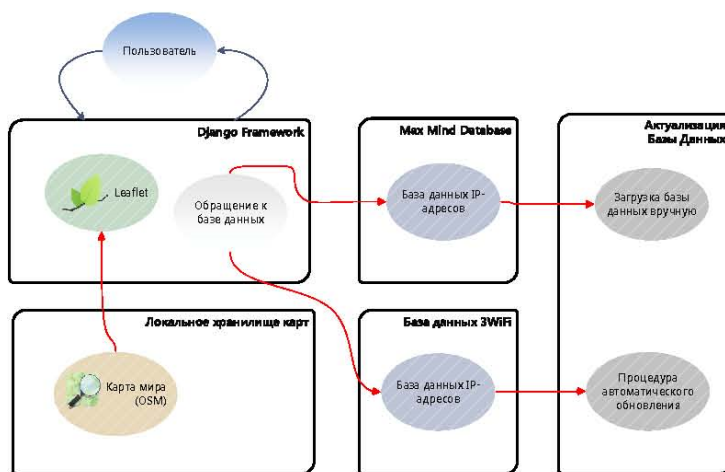


Рис. 1. Структурная схема картографического модуля

Отметим, что при использовании локальных БД, содержащих информацию об адресах, картографический модуль можно использовать без подключения к Интернету. Для этого web-сервер предоставляет режим ручной загрузки БД, а также возможность их автоматического обновления.

### Интерфейс пользователя картографического модуля

Скриншот рабочего окна картографического модуля представлен на рисунке 2.

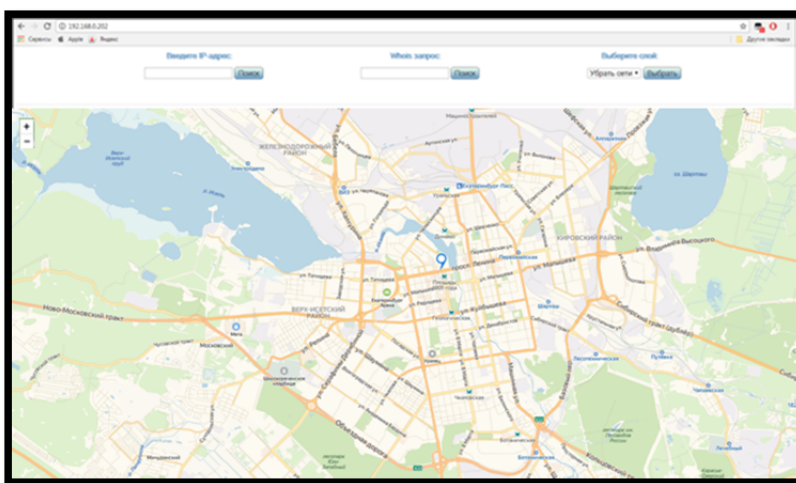


Рис. 2. Интерфейс пользователя



Из рисунка 2 видно, что интерфейс картографического модуля состоит из следующих управляющих элементов: кнопки увеличения масштаба карты; поля ввода IP-адреса и кнопки «Поиск», нажатие на которую инициирует поиск релевантной запросу информации в БД компании *MaxMind*; поля ввода IP-адреса и кнопки «Поиск», нажатие на которую инициирует поиск релевантной запросу информации в БД *WHOIS*; элемента управления слоями, отображаемыми на карте.

Интерфейс web-сервиса после выполнения запроса к БД компании *MaxMind* о поиске координат IP-адреса 95.173.148.66 в режиме вывода тестовой информации, представляющей интерес для специалиста-аналитика, ведущего расследование факта нарушения информационной безопасности, изображен на рисунке 3.

34

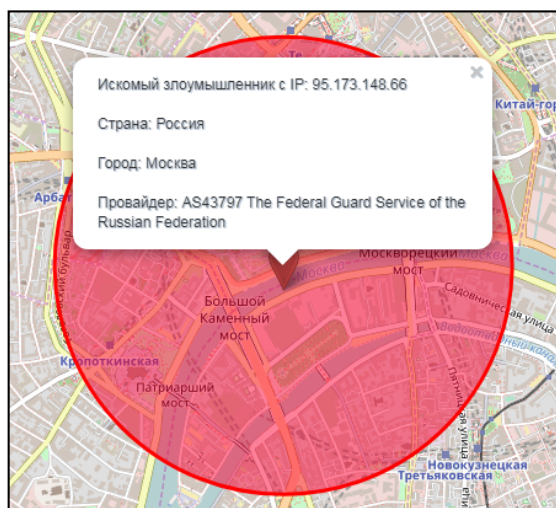


Рис. 3. Отображения информации о выбранном IP-адресе

### Направления дальнейшего развития картографического модуля

В настоящее время осуществляется разработка механизма, обеспечивающего интеграцию картографического модуля и модуля анализа сетевого трафика. После этого запланирована разработка следующих дополнительных сервисов картографического модуля:

- отображение на глобальной карте мира информационных потоков, отмеченных системой анализа сетевого трафика как «компьютерные атаки»;

- отображение IP-адресов, которые с высокой долей вероятности могут быть использованы злоумышленником для маскировки своего IP-адреса средствами VPN-туннелей;

- отображение IP-адресов и географического расположения беспроводных точек доступа в Интернет с низкой устойчивостью к перебору паролей (данные точки доступа потенциально могут быть использованы злоумышленником как «входные узлы» для проведения компьютерных атак);

- реализация механизма, позволяющего загружать данные об IP-адресах, полученных от Интернет-провайдеров.



## Заключение

Разработанный картографический модуль является инструментом, с помощью которого пользователи могут визуализировать информацию о IP-адресах, находящихся в общедоступных БД, с минимальными временными затратами.

Его дальнейшее развитие обеспечит специалистов-аналитиков удобным инструментом поддержки принимаемых ими решений при расследовании инцидентов, связанных с нарушениями информационной безопасности компьютерных сетей.

35

## Список литературы

1. *Интерактивная карта киберугроз*. URL: <https://cybermap.kaspersky.com/ru/stats> (дата обращения: 14.10.2019).
2. *Leaflet: an open-source JavaScript library for mobile-friendly interactive maps*. URL: <https://leafletjs.com/download.html> (дата обращения: 16.10.2019).
3. *Planet OSM*. URL: <https://planet.openstreetmap.org/> (дата обращения: 16.10.2019).
4. *GeoLite2 Free Downloadable Databases*. URL: <https://dev.maxmind.com/ru/geolite2/> (дата обращения: 16.10.2019).
5. *MaxMind DB Python Module*. URL: <https://maxminddb.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 16.10.2019).
6. *3WiFi* – свободная база точек доступа. URL: <https://3wifi.stascorp.com/home> (дата обращения: 16.10.2018).
7. *Ripe NCC*. URL: <https://www.ripe.net/> (дата обращения: 16.10.2019).
8. *Index of /ripe/dbase*. URL: <https://ftp.ripe.net/ripe/dbase/> (дата обращения: 16.10.2019).
9. *Django*. The web framework for perfectionists with deadlines. URL: <https://www.djangoproject.com/> (дата обращения: 16.10.2019).
10. *Creating your own tiles*. URL: [https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Creating\\_your\\_own\\_tiles](https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Creating_your_own_tiles) (дата обращения: 16.10.2019).

## Об авторах

Сергей Владимирович Поршнеv – д-р техн. наук, проф., Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина; ведущ. науч. сотр., Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Россия.

E-mail: s.v.porshnev@urfu.ru

Ольга Алексеевна Пономарева – ст. преп., Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия.

E-mail: o.a.ponomareva@urfu.ru

Эдуард Викторович Соломаха – ассист., Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия.

E-mail: o.a.ponomareva@urfu.ru



### **The authors**

Prof. Sergey V. Porshnev, Ural Federal University named after First President of Russia B.N. Yeltsin; Leading Researcher, N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch Russian Academy of Sciences, Russia.

E-mail: s.v.porshnev@urfu.ru

Olga A. Ponomareva, Assistant Professor, Ural Federal University named after First President of Russia B.N. Yeltsin, Russia.

E-mail: o.a.ponomareva@urfu.ru

36

Eduard V. Solomaha, Assistant, Ural Federal University named after First President of Russia B.N. Yeltsin, Russia.

E-mail: o.a.ponomareva@urfu.ru

УДК 538.9

А. И. Иванов, А. Т. Халиков

ПЕРЕНОС ПОЛЯРИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> В АЛМАЗЕ

*Исследован процесс переноса спиновой поляризации в системе NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> в алмазе в окрестности LAC. Использован метод, основанный на полном наборе коммутлирующих наблюдаемых. Показано, что при оптической накачке системы NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> в поле B ≈ 511,5 Г при комнатной температуре может быть осуществлен эффективный перенос поляризации от электронного спина NV<sup>-</sup>-центра к спину электрона P<sub>1</sub>-центра.*

37

*The process of spin polarization transfer in the NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> system in diamond in the vicinity of LAC is studied. A method based on a complete set of commuting observables was used. It was shown that with optical pumping of the NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> system in a field of B ≈ 511.5 G at room temperature, polarization can be transferred efficiently from the electron spin of the NV center to the electron spin of the P<sub>1</sub>-center.*

**Ключевые слова:** алмаз, спиновая поляризация, NV<sup>-</sup>-центр.

**Keywords:** diamond, spin polarization, NV<sup>-</sup>-center.

Ансамбли NV<sup>-</sup>-центров (nitrogen-vacancy centers) в алмазе представляют интерес для различных применений, включая формирование гиперполяризованных состояний. NV<sup>-</sup>-центр в алмазе был и остается предметом многочисленных исследований. Общей целью ряда исследовательских групп является перенос поляризации от электрона NV<sup>-</sup>-центра на ядерные спины примесей. В целом в этом направлении исследований имеются значительные успехи. Вместе с тем при обилии экспериментальных результатов значительная часть из них до сих пор не нашла убедительного объяснения. Среди результатов, ждущих своего теоретического обоснования, на первом месте – результаты экспериментального исследования процессов переноса поляризации от электронного спина NV<sup>-</sup>-центра к примесным спином окружения в окрестности LAC (level anti-crossing).

В данной работе для исследования процессов переноса спиновой поляризации в системе NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> в алмазе мы предлагаем использовать метод, основанный на полном наборе коммутлирующих наблюдаемых. Этот метод давно известен в квантовой механике (см., например, [1]), но до наших работ [2; 3] в спектроскопии не применялся. Важно отметить, что при таком подходе спиновые состояния однозначно определяются



полным набором коммутирующих наблюдаемых и каждый собственный спиновый вектор определяется совокупностью собственных значений этого набора. Это дает наиболее полное описание спиновых состояний многочастичных систем, какое только возможно получить в рамках квантовой теории. Предлагаемый подход позволяет не только более полно исследовать свойства поляризации спиновых состояний, но и пролить свет на роль ЛАС в процессах переноса поляризации в алмазе.

NV-центр – это точечный дефект в алмазе, обладающий симметрией  $C_{3v}$ , состоящий из атома азота, замещающего углерод, и ближайшей к нему вакансии в узле решетки. Его основное состояние является спиновым триплетом ( $S=1$ ) с осью квантования спина, совпадающей с осью симметрии центра. Примесные атомы азота, находящиеся в том же кристалле алмаза, что и NV-центры, часто называют  $P_1$ -центрами. Они имеют электронный спин  $S=1/2$ , обусловленный неспаренным электроном, и ядерный спин  $I=1$ , связанный с ядром  $^{14}\text{N}$ , или ядерный спин  $I=1/2$ , связанный с ядром  $^{15}\text{N}$ . Между электронными спинами NV-центра и  $P_1$ -центра возникает диполь-дипольная связь, которая и проявляется в ODMR-спектре пары NV<sup>-</sup> –  $P_1$ . Влияние ядерного спина проявляется гораздо слабее. Рассмотрим одиночный NV-центр со спином  $S_1=1$  и находящийся вблизи него атом азота с электронным спином  $S_2=1/2$ . С учетом диполь-дипольного взаимодействия этих спинов эффективный спин-гамильтониан основного состояния такой системы можно записать в виде

$$H = D \left( \hat{S}_{1z}^2 - \frac{\hat{S}_1^2}{3} \right) + g_e \beta_e B_z (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) + T^{\parallel} \hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z} + T^{\perp} (\hat{S}_{1x} \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y} \hat{S}_{2y}), \quad (1)$$

где  $D \approx 2870$  МГц – параметр тонкой структуры;  $T^{\parallel} = -13,81$  МГц;  $T^{\perp} = 33,34$  МГц – аксиальная и неаксиальная компоненты тензора  $T$  диполь-дипольного взаимодействия;  $g_e$  – электронный g-фактор.

Для расчета спектра гамильтониана (1) воспользуемся методом, который был предложен в [2]. С этой целью определим сначала оператор полного спина

$$\hat{J} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$$

и на основе принципов квантовой теории углового момента построим векторы  $|J, M_z\rangle$ , являющиеся собственными векторами полного набора коммутирующих операторов  $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$ :

$$|3/2, 3/2\rangle = |1,1\rangle|1/2, 1/2\rangle,$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle|1/2, -1/2\rangle,$$



$$\begin{aligned}
 |3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\
 |3/2, -3/2\rangle &= |1, -1\rangle|1/2, -1/2\rangle, \\
 |1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\
 |1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Несмотря на то, что в соотношениях (2) векторы допустимых состояний классифицированы по мультиплетам, отметим, что полный спин  $J$  не сохраняется, так как гамильтониан  $\hat{H}$  вида (1) не коммутирует с оператором  $\hat{J}^2$ . Вместе с тем гамильтониан коммутирует с операторами проекции полного спина, квадрата электронного спина NV-центра и квадрата электронного спина атома азота:

$$[\hat{H}, \hat{J}_z] = 0, \quad [\hat{H}, \widehat{S}_1^2] = 0, \quad [\hat{H}, \widehat{S}_2^2] = 0. \tag{3}$$

Операторы  $\hat{H}$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\widehat{S}_1^2$ ,  $\widehat{S}_2^2$  также составляют полный набор коммутирующих операторов. При использовании этого полного набора коммутирующих наблюдаемых векторы основного состояния системы, состоящей из NV-центра и P<sub>1</sub>-центра, однозначно характеризуются значением энергии  $E_i$ , проекцией полного спина  $M_z$  и электронными спинами  $S_1$  и  $S_2$ . Поскольку для всех рассматриваемых состояний электронные спины фиксированы, то есть  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 1/2$ , то уравнение на собственные значения и собственные векторы гамильтониана (1) можно записать в виде

$$\hat{H}|E_i, M_z\rangle = E_i|E_i, M_z\rangle, \tag{4}$$

где индекс  $i$  вводится, чтобы различать состояния с одинаковым значением  $M_z$  и разными значениями энергии  $E$ .

Прежде всего заметим, что состояние  $|E_1, 3/2\rangle = |3/2, 3/2\rangle$  и состояние  $|E_2, -3/2\rangle = |3/2, -3/2\rangle$  вида (2) удовлетворяют уравнению (4) с собственными значениями

$$\begin{aligned}
 E_1 &= D/3 + 3g_e\beta_e B_z/2 + T^{\parallel}/2, \\
 E_2 &= D/3 - 3g_e\beta_e B_z/2 + T^{\parallel}/2
 \end{aligned}$$

соответственно. Допустимыми стационарными состояниями  $|E_i, M_z\rangle$  с  $M_z = \pm 1/2$  являются суперпозиции вида

$$\begin{aligned}
 |E_{3(4)}, 1/2\rangle &= c_{3(4)}|3/2, 1/2\rangle + c'_{3(4)}|1/2, 1/2\rangle, \\
 |E_{5(6)}, -1/2\rangle &= c_{5(6)}|3/2, -1/2\rangle + c'_{5(6)}|1/2, -1/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{5}$$



Подставляя (5) в (4) и решая полученное уравнение, мы находим уровни энергии:

$$E_{3(4)} = -D / 6 + g_e \beta_e B_z / 2 - T^{\parallel} / 4 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(D - T^{\parallel} / 2)^2 + 2T^{\perp 2}},$$

$$E_{5(6)} = -D / 6 - g_e \beta_e B_z / 2 - T^{\parallel} / 4 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(D - T^{\parallel} / 2)^2 + 2T^{\perp 2}}.$$

Зависимость уровней энергии системы NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> от внешнего магнитного поля приведена на рисунке. На нем по оси абсцисс отложена величина внешнего магнитного поля в гауссах, а по оси ординат – величина энергии в мегагерцах.

40

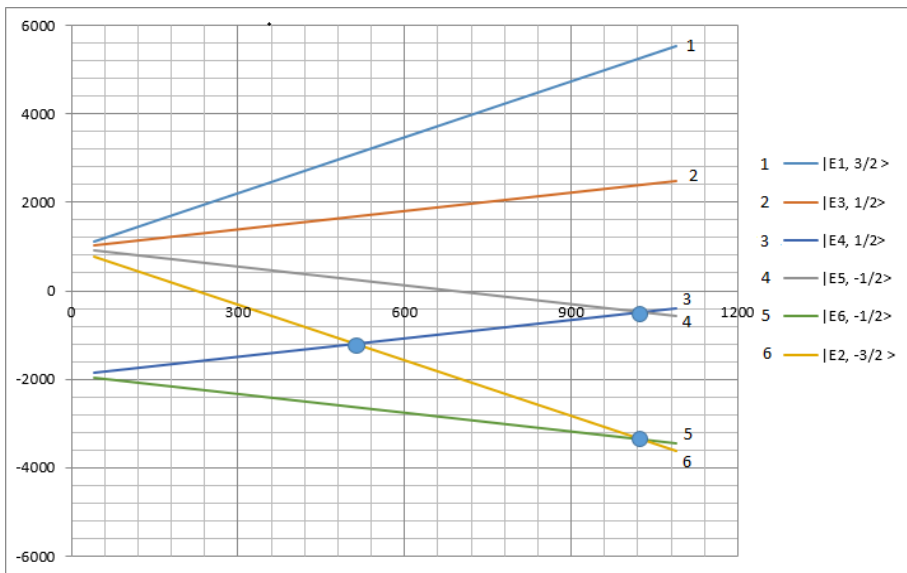


Рис. Зависимость энергии системы NV<sup>-</sup> – P<sub>1</sub> от внешнего магнитного поля

Состояния  $|E_i, M_z\rangle$  обладают одинаковой симметрией, и, следовательно, в силу известной теоремы соответствующие им уровни энергии пересекаться не должны. Однако на рисунке такие «квазипересечения» видны, они появляются при  $B \approx 511,5$  Г и  $B \approx 1028$  Г. Эти точки называют точками «квазипересечения» уровней энергии. Появление точек ЛАС при исследовании NV-центров в алмазе отмечено давно. Более того, в теоретических расчетах иногда предпринимаются попытки «обойти» эти точки, в связи с чем даже появился термин *avoided crossing*, однако удовлетворительной интерпретации ЛАС до сих пор нет.

Подход к описанию спиновых состояний, основанный на полном наборе коммутирующих наблюдаемых, позволяет предложить интерпретацию ЛАС, суть которой состоит в следующем. В нашем подходе каждое состояние  $|E_i, M_z\rangle$  характеризуется единственным набором соб-





ственных значений полного набора коммутирующих наблюдаемых  $\hat{H}, \hat{J}_z, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$ . Измеренные значения наблюдаемых, входящих в полный набор, коррелированы для каждого состояния. Следовательно, для выбранной ветви решения при фиксированных значениях параметров гамильтониана измерение наблюдаемых  $\hat{J}_z, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$  автоматически приводит к «измерению» энергии  $E$ . Аналогично, для выбранной ветви решения при фиксированных значениях параметров гамильтониана измерение наблюдаемых  $\hat{H}, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$  автоматически приводит к «измерению» проекции полного спина. Это справедливо всюду, за исключением точек  $B \approx 511,5$  Г и  $B \approx 1028$  Г. В этих точках (точках ЛАС) для выбранной ветви решения при избранных значениях параметров гамильтониана измерение наблюдаемых  $\hat{H}, \hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$  более не приводит автоматически к «измерению» проекции полного спина. Например, при  $B \approx 511,5$  Г для состояний  $|E_2, -3/2\rangle$  и  $|E_4, 1/2\rangle$  измерение энергии  $E$  (в этой точке  $E_2 = E_4$ ) не приводит автоматически к «измерению» проекции полного спина. Таким образом, при  $B \approx 511,5$  Г (в точке ЛАС, где  $E_2 = E_4$ ) состояние  $|E_2, -3/2\rangle$  и состояние  $|E_4, 1/2\rangle$  изменяют свои свойства: в этой точке каждое из них больше не характеризуются одновременно **определенным значением энергии и определенным значением проекции спина**, а потому теорема о непересечении уровней энергии одинаковой симметрии не нарушается. Мы также предполагаем, что отмеченное выше изменение свойств спиновых состояний в окрестности ЛАС приводит к наблюдаемым эффектам: возрастает скорость спин-решеточной релаксации этих состояний. Подобное суждение справедливо и относительно других точек ЛАС.

Подчеркнем, что векторы вида (2) и (5) описывают спин-поляризованные состояния системы  $NV^- - P_1$ , причем состояния (5) представляют спиновые запутанные состояния (entangled states) электронов  $NV^-$ -центра и  $P_1$ -центра. При оптической накачке этой системы во внешнем магнитном поле эффективно заселяются состояния  $|E_4, 1/2\rangle$  и  $|E_6, -1/2\rangle$ , причем при комнатной температуре и слабом поле их населенности равны. Следовательно, суммарная проекция полного электронного спина равна нулю всюду, кроме точек «квазипересечения» (ЛАС). В окрестности ЛАС, например, в поле  $B \approx 511,5$  Г (где  $E_2 = E_4$ ) состояние  $|E_4, 1/2\rangle$  более не характеризуется определенной проекцией спина и поэтому поляризация будет определяться заселенностью состояния  $|E_6, -1/2\rangle$ . Таким образом, при оптической накачке системы  $NV^- - P_1$  в поле  $B \approx 511,5$  Г при комнатной температуре может быть осуществлен эффективный перенос поляризации от электронного спина  $NV^-$ -центра к спину электрона  $P_1$ -центра.

#### Список литературы

1. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., 1979.



2. *Ivanov A.A., Ivanov A.I.* Side resonances and metastable excited state of NV-center in diamond. arXiv:1701.04097v1[cond-mat.mes-hall].

3. *Talatay A.A., Ivanov A.I., Halikov A.T.* Level anti-crossing in  $^{13}\text{C}$  enriched diamond. IEEE Xplore // 2018. **19 F.** 3086. doi: 10.1109/PIERS-FALL.2017.8293664.

#### Об авторах

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф. Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: aivanov@kantiana.ru

Александр Петрович Халиков — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: ahalikov-12@mail.ru

#### The authors

Prof. Alexey I. Ivanov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: aivanov@kantiana.ru

Alexander P. Halikov, PhD Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: ahalikov-12@mail.ru

*A. A. Ivanov, A. I. Ivanov, A. A. Kulagina*

## PHOTOLUMINESCENCE OF THE $^{15}\text{NV}$ -CENTER CREATED BY IMPLANTATION

*We study the properties of the spin states in single diamond  $^{15}\text{NV}$ -center at the ground state level anti-crossing. Our approach uses a complete set of commuting operators. We have shown that under certain conditions in  $^{15}\text{NV}$ -center it is possible to obtain a 100 % transfer of polarization from the electron spin to the spin of the  $^{15}\text{N}$  nucleus. We believe that these conditions can be satisfied for  $^{15}\text{NV}$ -centers obtained by implantation.*

43

*Мы изучаем свойства спиновых состояний в одиночном алмазном  $^{15}\text{NV}$ -центре на уровне пересечения основного состояния. Наш подход использует полный набор коммутирующих операторов. Мы показали, что при определенных условиях в  $^{15}\text{NV}$ -центре можно получить 100%-й перенос поляризации от спина электрона к спину ядра  $^{15}\text{N}$ . Мы полагаем, что эти условия могут быть выполнены для  $^{15}\text{NV}$ -центров, полученных имплантацией.*

**Keywords:** diamond, implantation, level anti-crossing.

**Ключевые слова:** алмаз, имплантация, антипереход уровня.

The negatively charged nitrogen-vacancy (NV-) centers in diamond are used in a broad range of applications. They serve as qubits [1] or probes for various physical properties like magnetic field [2], electric field [3]. They can also be used to detect the properties of electronic and nuclear spins such as substitutional nitrogen ( $\text{P}_1$ ) centers [4] or  $^{13}\text{C}$  atoms [5]. For all these applications it is important to know in detail the hyperfine structure of the NV-center.

The NV-center is an atom-like impurity in diamond crystal. The optical transitions of the NV- allow a high degree of spin polarization at room temperature via optical pumping. The electronic spin of the NV-centers is polarized into the ground-state magnetic sublevel  $m_s=0$  under optical illumination and measured using optical detection techniques [6]. The NV-center has a ground state triplet  $|\pm 1\rangle$  and  $|0\rangle$  separated by zero-field splitting at  $D \approx 2.87$  GHz. In a magnetic field  $B$  along the N-V axis, the Zeeman splitting  $\gamma_e B$  with electronic gyromagnetic ratio  $\gamma_e = 28.025$  GHz/T cancels the ground state zero-field splitting at a magnetic field at  $B \sim 1024$  G, leading to a ground state level anti-crossing (LAC) between  $m_s = |-1\rangle$  and  $m_s = |0\rangle$  [7]. However, in the presence of magnetic field the NV- experiences a complex LAC, due to hyperfine interaction of the NV- electron spin with other spins.

The diamond lattice consist also other spins i.e., electronic and nuclear spins that cannot be initialized or read out optically. A key challenge is to



transfer polarization controllably from bright NV spins to other spins. The authors of ref. [1] used the interaction of the electron spin NV-center with nearest  $^{13}\text{C}$  nuclear spin for the demonstration of quantum gate NOT and a conditional two-qubit gate. They used states of the form  $|m_s\rangle|m_i\rangle$ , where  $m_s = \pm 1$ ,  $m_i = \pm 1/2$ . We will show that similar states can occur in a  $^{15}\text{NV}$ -center under appropriate conditions.

The basis of the presented approach of NV LAC investigation is a method based on a complete set of commuting operators (CSCO). To find an eigenvalues for a NV spin Hamiltonian, it is necessary to choose the spin basis functions. Usually, simple products of one-particle spin functions are used as approximations for a many-particle functions. To obtain eigenvectors and eigenvalues of the spin Hamiltonian we introduce a method based on a complete set of commuting operators (CSCO). This method is well known in quantum mechanics for a long time, but has never been implemented in spectroscopy up until recently [8; 9]. The Hamiltonian in the presented approach is considered either a CSCO operator, or a function of CSCO. The properties of the spin states are uniquely determined by CSCO. Every eigenvector in this approach is determined by the unique value set of CSCO. Most of the resulting spin states are qualified as entangled spin states. The energy levels are found by solving a series of equations of less degree, than the ones found by diagonalizing the Hamiltonian using the numerical methods. It is also possible to obtain analytical expressions for some of the energy levels.

The NV-center in diamond consists of a nitrogen atom, which substitutes for a carbon atom, and a lattice vacancy. Its ground state is triplet state ( $S=1$ ) with an spin quantization axis provided by the NV-center axis of symmetry. We consider a single NV-center with a  $^{15}\text{N}$  nitrogen isotope having a nuclear spin  $I=1/2$ . The ground-state spin Hamiltonian of NV-center in the presence of magnetic field  $B$  reads as (as per [10], in frequency units):

$$\hat{H} = D(\hat{S}_z^2 - \hat{S}^2/3) + A_{\parallel}\hat{S}_z\hat{I}_z + A_{\perp}(\hat{S}_x\hat{I}_x + \hat{S}_y\hat{I}_y) + \gamma_e\hat{S}_zB_z + \gamma_n\hat{I}_zB_z, \quad (1)$$

where  $D \approx 2870$  MHz is the fine structure splitting,  $A_{\parallel} = 3.03$  MHz and  $A_{\perp} = 3.65$  MHz are the axial and non-axial magnetic hyperfine parameters, z-axis aligns with electronic spin quantization axis,  $\gamma_e = 28.025$  GHz/T is the electron gyromagnetic ratio and  $\gamma_n = 4.316$  kHz/mT is the  $^{15}\text{N}$  gyromagnetic ratio.

To calculate the energy spectrum for the Hamiltonian we first determine the total spin operator:

$$\hat{J} = \hat{S} + \hat{I}.$$

The operators  $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{S}^2, \hat{I}^2$  form a complete set of commuting operators (CSCO). The eigenvectors  $|J, M_z\rangle$  of this CSCO takes the form



$$\begin{aligned}
 |3/2, 3/2\rangle &= |1,1\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\
 |3/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle|1/2, -1/2\rangle, \\
 |3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\
 |3/2, -3/2\rangle &= |1, -1\rangle|1/2, -1/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 |1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\
 |1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|1/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Note that the total spin  $J$  of the  $\text{NV}^-$ -center is not preserved, as the Hamiltonian (1) does not commute with the operator  $\hat{J}^2$ . At the same time, the Hamiltonian commutes with the projection of the total spin, the square of the electron spin and nuclear spin square:

$$[\hat{H}, \hat{J}_z] = [\hat{H}, \hat{S}^2] = [\hat{H}, \hat{I}^2] = 0. \tag{4}$$

Set of operators  $\hat{H}$ ,  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{S}^2$ ,  $\hat{I}^2$  is also a CSCO. This set has the unique system of eigenvectors: each eigenvector is characterized by a single set of commuting observables values. Consequently, the spin states of the  $\text{NV}^-$ -center are characterized by the energy  $E$ , the projection  $M_z$  of the total spin, the electron spin  $S$ , and the nuclear spin  $I$ :  $|E, M_z, S, I\rangle$ . Since for all of these states  $S=1$ ,  $I=1/2$ , then the equation for the eigenvalues and eigenvectors of the Hamiltonian (1) can be written as

$$\hat{H} |E_{M_z}^{(i)}\rangle = E_{M_z}^{(i)} |E_{M_z}^{(i)}\rangle, \tag{5}$$

where the index  $(i)$  is introduced in order to distinguish the states with the even values of  $M_z$  and different values of energy  $E$ . Solving the equation (5) gives

$$\begin{aligned}
 E_{1/2}^{(\pm)} &= \left[ -D/3 - A_{||} / 2 + \Gamma_e \pm \sqrt{(D - A_{||} / 2 + \Gamma_e - \Gamma_n)^2 + 2A_{\perp}^2} \right] / 2, \\
 E_{-1/2}^{(\pm)} &= \left[ -D/3 - A_{||} / 2 - \Gamma_e \pm \sqrt{(D - A_{||} / 2 - \Gamma_e + \Gamma_n)^2 + 2A_{\perp}^2} \right] / 2, \\
 E_{\pm 3/2} &= D/3 + A_{||} / 2 \pm \Gamma_e \pm \Gamma_n / 2,
 \end{aligned} \tag{6}$$



$$|E_{3/2}\rangle = |1,1\rangle|1/2, 1/2\rangle,$$

$$|E_{-3/2}\rangle = |1,-1\rangle|1/2, -1/2\rangle,$$

$$|E_{1/2}^{(\pm)}\rangle = C_1^\pm|3/2, 1/2\rangle + C_2^\pm|1/2, 1/2\rangle,$$

$$|E_{-1/2}^{(\pm)}\rangle = C_1^\pm|3/2, -1/2\rangle + C_2^\pm|1/2, -1/2\rangle,$$

where  $\Gamma_e = \gamma_e B_z$ ,  $\Gamma_n = \gamma_n B_z$ . The states  $|E_{1/2}^{(\pm)}\rangle$  and  $|E_{-1/2}^{(\pm)}\rangle$  are entangled states.

46

The energy  $E_{M_z}^{(i)}$  is a single-valued function of the total spin projection  $M_z$ . This means that if the projection  $M_z$  of the total spin in a certain state has a definite value, then the energy  $E_{M_z}^{(i)}$  of this state also has a definite value. The opposite statement is also true: if the energy  $E_{M_z}^{(i)}$  has a definite value, then the projection  $M_z$  also has a definite value. It is important to note that this function's uniqueness is violated, in particular, in a zero magnetic field. In this case the energy levels are pairwise equal and we have the complete level anti-crossing (CLAC):

$$E_{3/2} = E_{-3/2}, \quad E_{1/2}^{(+)} = E_{-1/2}^{(+)}, \quad E_{1/2}^{(-)} = E_{-1/2}^{(-)}. \quad (7)$$

When the equalities (7) are satisfied, all of these spin states do not have definite values for the total spin projection. The spin-lattice relaxation rates of all these states will increase, therefore, the ODMR spectrum of such an NV-center will not have characteristic dips.

We further discuss the conditions under which one can observe the effective transfer of polarization from the electron spin to the nuclear spin in the  $^{15}\text{NV}$ -center. Assuming  $A_\perp = 0$  in (1), the Hamiltonian  $\hat{H}$  of the  $^{15}\text{NV}$ -center can be written in the following form:

$$\hat{H} = D(\hat{S}_z^2 - \hat{S}^2/3) + A_{||}\hat{S}_z\hat{I}_z + \gamma_e\hat{S}_zB_z + \gamma_n\hat{I}_zB_z. \quad (8)$$

We note also that the set of the operators  $\hat{S}_z, \hat{I}_z, \hat{S}^2, \hat{I}^2$  is a CSCO. The Hamiltonian (8) commutes with all operators of this set. Consequently, the operator  $\hat{H}$  is a function of this operator set. The eigenvalues and eigenvectors of Hamiltonian (8) are:

$$\begin{aligned} E_{3/2} &= D/3 + A_{||}/2 + \Gamma_e + \Gamma_n/2, \quad E_{-3/2}^{(+)} = D/3 - A_{||}/2 - \Gamma_e + \Gamma_n/2, \\ E_{-3/2} &= D/3 + A_{||}/2 - \Gamma_e - \Gamma_n/2, \quad E_{1/2}^{(-)} = -2D/3 + \Gamma_n/2, \\ E_{1/2}^{(+)} &= D/3 - A_{||}/2 + \Gamma_e - \Gamma_n/2, \quad E_{-1/2}^{(-)} = -2D/3 - \Gamma_n/2, \end{aligned} \quad (9)$$



$$\begin{aligned} |E_{3/2}\rangle &= |1,1\rangle|1/2, 1/2\rangle, & |E_{-1/2}^{(+)}\rangle &= |1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\ |E_{-3/2}\rangle &= |1, -1\rangle|1/2, -1/2\rangle, & |E_{1/2}^{(-)}\rangle &= |1,0\rangle|1/2, 1/2\rangle, \\ |E_{1/2}^{(+)}\rangle &= |1,1\rangle|1/2, -1/2\rangle, & |E_{-1/2}^{(-)}\rangle &= |1,0\rangle|1/2, -1/2\rangle. \end{aligned}$$

We see that in such a  $^{15}\text{NV}^-$ -center there is a 100 % transfer of polarization from the electron spin to the spin of the  $^{15}\text{N}$  nucleus: all states are completely polarized and have the form  $|m_s\rangle|m_i\rangle$ . States  $|E_{1/2}^{(-)}\rangle$  and  $|E_{-1/2}^{(-)}\rangle$  under optically pumped are effectively populated. The energies of these states do not depend on the parameter  $A_{\parallel}$ . We note that in a zero magnetic field these energies are equal  $E_{1/2}^{(-)} = E_{-1/2}^{(-)}$  (LAC). Therefore, the observable  $I_z$  in zero magnetic field is not a function of the observable  $E$  [11]. This means that the quantum number  $m_i$  in a zero magnetic field for the states  $|E_{-1/2}^{(-)}\rangle$  and  $|E_{1/2}^{(-)}\rangle$  is not has a definite value. We note that in a weak magnetic field (for example, in the field of the Earth) these energies are close to each other:  $E_{1/2}^{(-)} \approx E_{-1/2}^{(-)}$  (LAC). The energy splitting  $\delta = E_{1/2}^{(-)} - E_{-1/2}^{(-)}$  at  $B=0.5$  G (Earth's magnetic field at its surface) is only 200 Hz, therefore, the two peaks of the ODMR spectrum of such a  $^{15}\text{NV}^-$ -center will overlap. This means that the quantum number  $m_i$  in a weak magnetic field also is not a good quantum number. In contrast, the quantum number  $m_s$  is a good quantum number. For states  $|E_{-1/2}^{(-)}\rangle$  and  $|E_{1/2}^{(-)}\rangle$ , the value of  $m_s$  is 0 and, therefore, such a  $^{15}\text{NV}^-$ -center is a bright center. The quantum number  $m_i$  for these states will be a good quantum number in a sufficiently strong magnetic field.

Typically, NV-centers in diamond are mainly created by  $\text{N}^+$  ion implantation [12–14] or by nitrogen-doping during CVD growth [15]. Diamond substrates already contain NV-centers. To distinguish between native and artificial NV-centers,  $^{15}\text{N}$  isotopes are often used for the implantation. The different nuclear spins of  $I=1$  for  $^{14}\text{N}$  and  $I=1/2$  for  $^{15}\text{N}$  result in hyperfine triplet or doublet splittings in  $^{14}\text{NV}^-$  and  $^{15}\text{NV}^-$ -centers, respectively. In ref. [12]  $^{14}\text{NV}^-$ -centers in diamond have been generated via  $^{14}\text{N}$  ions implantation and ODMR was used to measure the hyperfine splitting. The analysis of a number of NV-color centers leads to the conclusion, that on average two nitrogen ions need to be implanted per  $^{14}\text{NV}^-$ -center.  $^{15}\text{NV}^-$ -centers were created in ref. [13] by implantation of the  $^{15}\text{N}^+$  ions. The analysis indicates that 1 in 40 implanted  $^{15}\text{N}^+$  ions give rise to an optically observable  $^{15}\text{NV}^-$ -center. Many factors may influence the yields for  $^{15}\text{NV}^-$ -centers. We consider an additional factor that can affect the yield of observable  $^{15}\text{NV}^-$ -centers: LAC. The  $^{15}\text{N}$  ion beam used in the implantation process has strong anisotropy, therefore, it can be assumed that the isotropic contribution to the energy of the  $^{15}\text{NV}^-$ -center produced by implantation will be small.



We investigated the properties of the spin states in single diamond  $^{15}\text{NV}$ -center at the LAC. Our approach uses a complete set of commuting operators. Each state is characterized by a single set of the values of CSCO. The uniqueness of this set of values is violated, in particular, in a zero magnetic field. In this case the energy levels are pairwise equal and can be considered a special case of a level anti-crossing. We have shown that under certain conditions in  $^{15}\text{NV}$ -center it is possible to obtain a 100 % transfer of polarization from the electron spin to the spin of the  $^{15}\text{N}$  nucleus. We believe that these conditions can be satisfied for  $^{15}\text{NV}$ -centers obtained by implantation.

### References

1. Jelezko F., Gaebel T., Popa I. *et al.* Observation of coherent oscillation of a single nuclear spin and realization of a two-qubit conditional quantum gate. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 130501 (2004).
2. Acosta V.M. *et al.* Broadband magnetometry by infrared-absorption detection of nitrogen-Vacancy ensembles in diamond. *Appl. Phys. Lett.* **97**, 174104 (2010).
3. Dolde F. *et al.* Electric-field sensing using single diamond spins. *Nature Physics* **7**, 459 (2011).
4. Hall L.T., Kehayias P., Simpson D.A. *et al.* Electron spin resonance spectroscopy via relaxation of solid-state spin probes at the nanoscale. arXiv:1503.00830v1[quant-ph] (2015).
5. Jarmola A. *et al.* Optically detected magnetic resonances of NV ensembles in  $^{13}\text{C}$  enriched diamond. arXiv:1608.08706v1[quant-ph] (2016).
6. Oort van E., Manson N.B., Glasbeek M. Optically detected spin coherence of the diamond NV centre in its triplet ground state. *J. Phys. C* **21**, 4385 (1988).
7. He X.-F., Manson N.B., Fisk P.T.H. Paramagnetic-resonance of photoexcited NV defects in diamond. I. Level anticrossing in the  $3A$  ground state. *Phys. Rev. B* **47**, 8809 (1993).
8. Ivanov A.A., Ivanov A.I. Side resonances and metastable excited state of NV-center in diamond. arXiv:1701.04097v1[cond-mat.mes-hall].
9. Talatay A.A., Ivanov A.I., Halikov A.T. Level anti-crossing in  $^{13}\text{C}$  enriched diamond. *IEEE Xplore*, **19 F.**, 3086 (2018).
10. Dolde F., Bergholm V., Wang Y. *et al.* High fidelity spin entanglement using optimal control. arXiv:1309.4430v1[quant-ph].
11. Dirac P.A.M. *The principles of quantum mechanics.* Oxford, 1958.
12. Meijer J. *et al.* Generation of single color centers by focused nitrogen implantation. *Appl. Phys. Lett.* **87**, 261909 (2005).
13. Rabeau J.R. *et al.* Implantation of labeled single nitrogen- vacancy center in diamond. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 023113 (2006).
14. Ito K., Saito H., Watanabe H. *et al.* Nitrogen-vacancy centers created by  $\text{N}^+$  ion implantation through screening  $\text{SiO}_2$  layers on diamond. *Appl. Phys. Lett.* **110**, 213105 (2017).
15. Kleinsasser E.E. *et al.* High density NV sensing surface created via  $\text{He}^+$  ion implantation of  $^{12}\text{C}$  diamond. *Appl. Phys. Lett.* **108**, 202401 (2016).

### The authors

Alexander A. Ivanov, Programmer, Kode LLC, Russia.  
Email: aivanov023@gmail.com





Prof. Ivanov I. Alexey, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.  
E-mail: aivanov@kantiana.ru

Anastasia A. Kulagina, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.  
E-mail: alebedkina@kantiana.ru

#### **Об авторах**

Александр Алексеевич Иванов — программист, ООО «Кодэ», Россия.  
E-mail: aivanov023@gmail.com

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.  
E-mail: aivanov@kantiana.ru

Анастасия Алексеевна Кулагина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.  
E-mail: alebedkina@kantiana.ru

**В. И. Бурмистров, В. Е. Пониматкин, Т. А. Карпинская  
В. А. Гоглев, А. С. Кузьмичев**

## **УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПЕРЕДАЮЩИХ АНТЕННЫХ СИСТЕМ**

50

Требования, предъявляемые к антенным системам средних и длинных волн, предполагают дальнейшее улучшение их электродинамических и конструктивных свойств, что связано прежде всего со спецификой использования данного диапазона для обеспечения связи с подвижными объектами, в том числе с надводными морскими судами, радиовещания, передачи сигналов специального назначения и других целей. При этом значительное внимание уделяется конструкциям передающих антенн, возможности снижения их габаритов, уменьшения взаимного влияния в условиях сложной электромагнитной обстановки, повышения надежности радиосвязи. Вопросам развития данного направления с точки зрения радиотехники посвящена статья.

*The requirements for medium-and long-wave antenna systems imply further improvement of their electrodynamic and structural properties, which is primarily related to the specifics of using this range to provide communication with mobile objects, including surface ships, radio broadcasting, transmit special-purpose signals and other purposes. At the same time, considerable attention is paid to the structures of transmitting antennas, the possibility of reducing their size, reducing mutual influence in a complex electromagnetic environment, and improving the reliability of radio communications. The presented work is devoted to the development of this direction from the point of view of radio engineering.*

**Ключевые слова:** рамочная антенна, поляризация излучения, ферритовый магнитопровод, электрический вектор, магнитная проницаемость, излучаемая мощность.

**Keywords:** loop antenna, polarization of radiation, ferrite magnetic circuit, electric vector, magnetic permeability, radiated power.

Радиоволны с частотами 3 кГц – 3 МГц (диапазон сверхдлинных (СДВ), длинных (ДВ) и средних (СВ) волн), распространяющиеся в пределах волновода «Земля – ионосфера», характеризуются преимущественно вертикальной поляризацией ввиду их взаимодействия с земной поверхностью, что в значительной степени определяет конструктивные параметры передающих антенных систем, которые в данном случае строятся на основе Г-, Т-образных излучателей [1; 2]. Используются также зонтичные конструкции [2]. Необходимость эксплуатации излучающих систем в условиях, близких к режиму собственной длины волны ( $\ell = \lambda / 4$ ) [2; 3], который рассчитан на обеспечение максимальной мощности излучения, приводит к тому, что антенны диапазонов СДВ – СВ являются протяженными и громоздкими.



В целях уменьшения геометрических размеров излучающих систем возможна замена типовых конструкций более компактными рамочными антеннами [4], обладающими аналогичными электромагнитными свойствами. Ключевым условием при этом является обеспечение необходимого уровня мощности, достаточного для возбуждения волновода «Земля – ионосфера». Одной из задач, которую требуется решить для достижения поставленной цели, является повышение относительно низкого сопротивления излучения рамочной антенны.

Для этого рассмотрим схему формирования вертикальной составляющей вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_B$  и горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля  $\vec{H}_\Gamma$  (рис. 1, а) в пространстве, обеспечивающих возбуждение сферического волновода «Земля – ионосфера», а также вариант технической реализации указанного случая (рис. 1, б). В магнитопроводе 1 наводится магнитный поток  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}_\Gamma$ , возбуждаемый переменным током  $I_\sim$  в витках проводника «а–б», охватывающего магнитопровод. Электрический вектор  $\vec{E}_B$  в этом случае 1 возбуждается в пространстве вертикально.

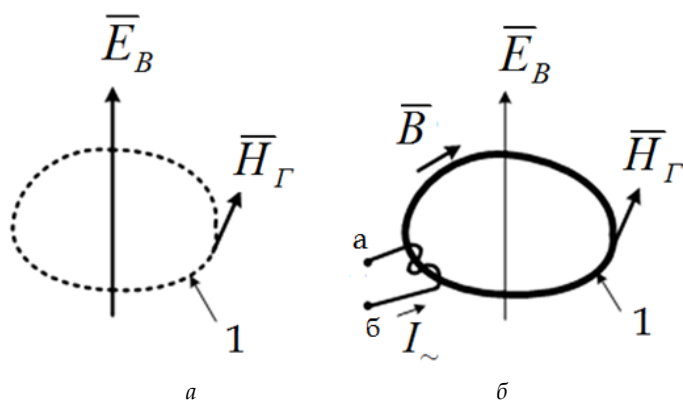


Рис. 1. Схема формирования составляющих напряженности электромагнитного поля рамочной антенной

Вариант, представленный на рисунке 1, может быть реализован следующим образом. Передающая антенная система, структурная схема которой изображена на рисунке 2, содержит 8 формирователей вертикальной составляющей электрического поля А; 1 – генератор СДВ, ДВ и СВ частот; 2 – модулятор; 3 – информационный блок. При этом выход генератора частот 1 соединен через первый вход модулятора 2 со входами 8 формирователей вертикальной составляющей электрического поля А; выход информационного блока 3 соединен со вторым входом модулятора 2; 8 формирователей вертикальной составляющей электрического поля А образуют синфазную систему излучателей и размещены в пределах радиуса с диаметром  $d = 100$  м.

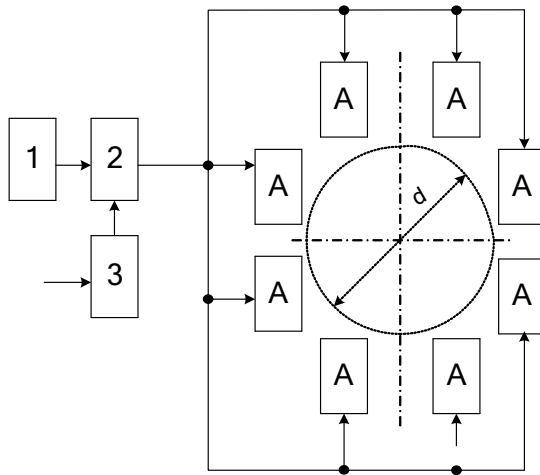


Рис. 2. Структурная схема передающей антенной системы

На рисунке 3 показана принципиальная схема передающей антенной системы указанных диапазонов, обеспечивающая формирование вертикальной составляющей электрического поля и содержащая в общем случае  $N$  магнитопроводов  $M$  с обмотками. Повышение излучаемой системой мощности достигается увеличением числа магнитопроводов.

На схеме рисунка 3 введены следующие обозначения: 1 – генератор СДВ, ДВ или СВ диапазонов; 2 – модулятор; 3 – информационный блок; 4 – усилитель мощности; Тр.1 – трансформатор с одной первичной обмоткой 1 и  $N$  идентичных вторичных обмоток (с первой вторичной обмотки 2.1 по  $N$ -обмотку 2. $N$ );  $N$  магнитопроводов (с первого  $M_1$  по  $N$ -магнитопровод  $M_N$ ).

Выход генератора 1 соединен через первый вход модулятора 2 с входом усилителя мощности 4, выход информационного блока 3 соединен со вторым входом модулятора 2. Первый выход усилителя мощности 4 соединен с клеммой «а» первичной обмотки первого трансформатора Тр. 1, а второй выход усилителя мощности 4 соединен с клеммой «б» первичной обмотки первого трансформатора Тр. 1. Первая вторичная обмотка 2.1 первого трансформатора Тр. 1 клеммой «к» соединена с клеммой «в» обмотки возбуждения магнитного потока  $\bar{B}$  в первом магнитопроводе  $M_1$ , а клемма «с» первой вторичной обмотки 2.1 первого трансформатора Тр. 1 соединена с клеммой «д» обмотки возбуждения магнитного потока  $\bar{B}$  в первом магнитопроводе  $M_1$ .

Вторая вторичная обмотка 2.2 первого трансформатора Тр. 1 клеммой «к» соединена с клеммой «в» обмотки возбуждения магнитного потока  $\bar{B}$  во втором магнитопроводе  $M_2$ , а клемма «с» второй вторичной обмотки 2.2 первого трансформатора Тр. 1 соединена с клеммой «д» обмотки возбуждения магнитного потока  $\bar{B}$  в первом магнитопроводе  $M_2$  и т. д.

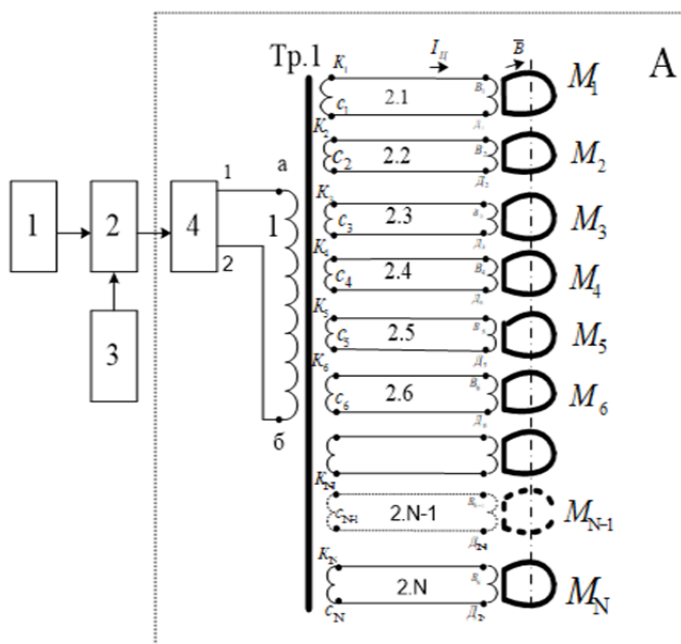


Рис. 3. Принципиальная схема передающей антенной системы с формирователем сигналов

На рисунке 4 схематично представлена конструкция одной из катушек, смонтированной на ферритовом магнитопроводе (любом — от первого  $M_1$  до  $N$ -магнитопровода  $M_N$ ), который содержит 3 ферритовых кольца. Кольца ориентированы параллельно поверхности земли.

Первое ферритовое кольцо имеет диаметр  $d_{M1}=3$  м, сечение  $d_{01}=0,2$  м и магнитную проницаемость  $\mu = 2000$  мкГн. Второе ферритовое кольцо — диаметр  $d_{M2}=2,5$  м, сечение  $d_{02}=0,2$  м и магнитную проницаемость  $\mu = 1000$  мкГн. Третье ферритовое кольцо — диаметр  $d_{M3}=2$  м, сечение  $d_{03}=0,2$  м и магнитную проницаемость  $\mu = 400$  мкГн. Вк. 1, Вк. 2 и Вк. 3 — двухконтактные выключатели;  $L_{сдв}$ ,  $L_{дв}$  и  $L_{св}$  — индуктивности возбуждения магнитного потока  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$  [5] в 3 ферритовых кольцах. При этом каждый магнитопровод из  $M_N$  входной клеммой «Д<sub>N</sub>» соединен параллельно с клеммой «л» первого двухконтактного выключателя Вк. 1, с клеммой «ж» второго двухконтактного выключателя Вк. 2 и с клеммой «г» третьего двухконтактного выключателя Вк. 3. Входной клеммой «В<sub>N</sub>» соединен параллельно с клеммой «ц» первого выключателя Вк. 1, с клеммой «э» второго выключателя Вк. 2 и с клеммой «ч» третьего выключателя Вк. 3.

Клемма «я» первого двухконтактного выключателя Вк. 1 соединена через индуктивность  $L_{сдв}$  с клеммой «р» первого двухконтактного выключателя Вк. 1. Клемма «з» второго двухконтактного выключателя Вк. 2 соединена через индуктивность  $L_{св}$  с клеммой «т» второго двух-



контактного выключателя Вк. 2. Клемма «н» третьего двухконтактного выключателя Вк. 3 соединена через индуктивность  $L_{CB}$  с клеммой «е» третьего двухконтактного выключателя Вк. 3.

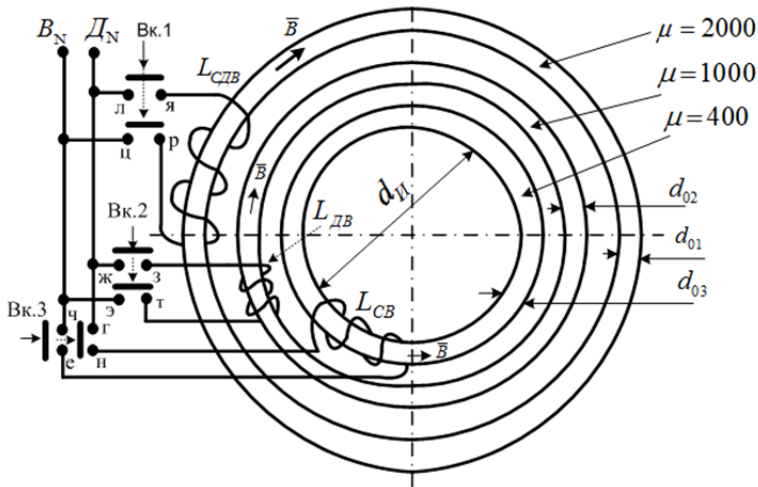


Рис. 4. Конструкция катушки излучателя с магнитопроводом

На рисунке 5 схематически представлено в сечении одно из ферритовых колец в любом из  $N$  магнитопроводов  $M_N$ , содержащее ферритовое кольцо радиусом  $d_H$  и сечением  $d_0$ , катушку возбуждения с длиной намотки  $\ell_K$  на ферритовом сердечнике диаметром  $d_K$ . При этом утолщение части ферритового кольца осуществлено непосредственно под длиной намотки катушки исходя из отношения длины катушки  $\ell_K$  к ее диаметру  $d_K$ , определяемого на основании эмпирического неравенства

$$0,25 < \ell_K / d_K < 1,3.$$

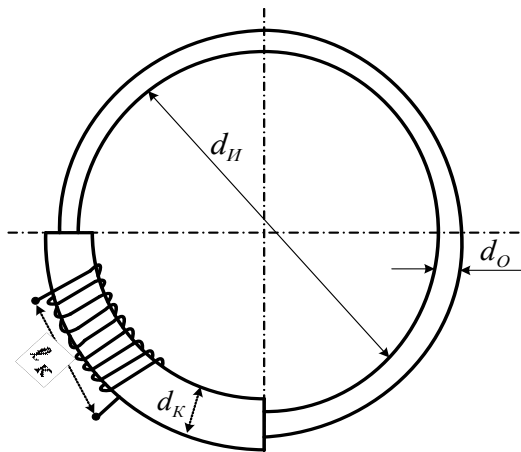


Рис. 5. Конструкция одной из катушек на кольце магнитопровода



Параметры кольца можно определить из результатов экспериментально полученных измерений, приведенных на рисунке 6 в виде зависимости действующей магнитной проницаемости  $\mu_d$  сердечника от отношения его длины  $\ell_k$  к диаметру  $d_k$ .

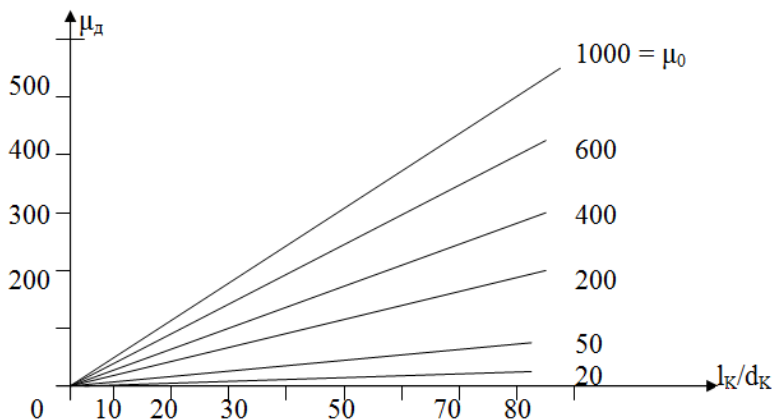


Рис. 6. Графики экспериментальных зависимостей для определения оптимальных размеров магнитопровода излучателя

Таким образом, в статье рассмотрены электродинамические вопросы возбуждения вертикально поляризованного электрического вектора поля в сферическом волноводе «Земля – ионосфера». Показаны возможные пути решения за счет использования вертикальных излучателей, обладающих высокими массогабаритными характеристиками. Предложена методика построения альтернативных конструкций в виде магниторамочных антенн, обеспечивающих эффективную передачу сигналов в диапазонах сверхдлинных, длинных и средних волн.

### Список литературы

1. Муравьев А. В. Справочник по расчету проволочных антенн. Л., 1992.
2. Блюх П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости земля-ионосфера. Киев, 1977.
3. Вершков М. В., Миротворский О. Б. Судовые антенны. Л., 1990.
4. Гончаренко И. В. Антенны КВ и УКВ. Часть II. Основы и практика. М., 2005.
5. Виниченко А. И. Теория тракта распространения радиоволн линий радиосвязи. Л., 1984.

### Об авторах

Валерий Иванович Бурмистров – ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VBurmistrov@kantiana.ru

Виктор Ефимович Пониматкин – канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru



Татьяна Александровна Карпинская — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: TKarpinskaya@kantiana.ru

Владислав Алексеевич Гоглев — студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Александр Сергеевич Кузьмичев — студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

### The authors

Valery I. Byrmistrov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VByrmistrov@kantiana.ru

Dr Viktor E. Ponimatkin, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Tatyana A. Karpinskaya, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: TKarpinskaya@kantiana.ru

Vladislav A. Goglev, Undergraduate Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Aleksandr S. Kyzmichev, Undergraduate Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru



**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин**

**ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ  
С ИСПАРЯЮЩИМИСЯ КАПЛЯМИ**

57

Рассмотрены особенности моделирования газовых потоков с испаряющимися каплями. Такие потоки встречаются в энергетических установках и технологических аппаратах. Исследованы кривая сопротивления для капли с поправками для квазистационарного движения, зависимость коэффициента поправочного от безразмерной интенсивности испарения, зависимости безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии от различных параметров. Графики представлены в безразмерных переменных. Получено, что увеличение размеров капель повлечет изменение их формы и коэффициента гидродинамического сопротивления.

*The features of modeling gas flows with evaporating droplets are considered. Such flows are found in power plants and technological devices. The resistance curve for a drop with corrections for quasi-stationary motion, the dependence of the correction coefficient on the dimensionless intensity of evaporation, the dependence of the dimensionless intensity of the pulsation energy decrease on various parameters are studied. Graphs are represented in dimensionless variables. It was found that increasing the size of the droplets will cause a change in their shape and coefficient of hydrodynamic resistance.*

**Ключевые слова:** турбулентный газовый поток, испарение капли, интенсивность испарения.

**Keywords:** turbulent gas flow, droplet evaporation, evaporation intensity.

Турбулентные газовые потоки с дисперсными каплями жидкости широко используются в энергетических установках и технологических аппаратах. Математическое моделирование таких высокотемпературных течений требует учета влияния испарения капель на динамику, теплообмен и турбулентную структуру (см. [1–6] и библиографию в них). При этом нередко не все важные аспекты моделирования турбулентных газодисперсных потоков с фазовыми переходами принимаются во внимание [7–10].

В данной статье рассматриваются особенности моделирования турбулентных газовых потоков с испаряющимися каплями.

Интенсивность межфазного перехода массы рассчитывается как произведение расхода пара от одной капли на величину счетной концентрации капель  $K$ . Счетная концентрация частиц выражается через объемную долю дисперсной фазы и объем частицы  $\Theta_1$ :

$$K = \frac{\alpha_p}{\Theta_1} = \frac{\rho_p / \rho_p^0}{\pi \delta^3 / 6}, \quad (1)$$



где  $\alpha_p$  – доли объема смеси, занимаемые каждой фазой  $\alpha_k = \rho_p / \rho_p^0$ ;  $\rho_p^0, \rho_p$  – истинная и распределенная плотность  $k$ -й фазы соответственно;  $\delta$  – размер включения.

Если условия испарения капли не изменяются, то уменьшение диаметра описывается законом Срезневского [3; 8]:

$$\delta^2 = \delta_0^2 (1 - N \cdot t), \quad (2)$$

где  $N$  характеризует интенсивность испарения;  $\delta_0$  – начальный диаметр капли.

Продифференцируем (2) по времени, чтобы найти интенсивность испарения одиночной капли:

$$2\delta \frac{d\delta}{dt} = -\delta_0^2 N, \quad J_1 = \frac{dm}{dt} = \frac{\pi}{6} \rho_p^0 3\delta^2 \frac{d\delta}{dt} = -\frac{\pi}{4} \delta \delta_0^2 N \rho_p^0. \quad (3)$$

Тогда интенсивность межфазного массообмена будет

$$J = J_1 \cdot K = \frac{3}{2} \frac{\delta_0^2}{\delta^2} N \cdot \bar{\rho}_p, \quad (4)$$

где  $J$  – интенсивность перехода массы из несущей фазы в дисперсную (например, при испарении каплей  $J < 0$ , при конденсации  $J > 0$ ).

Сила межфазного взаимодействия рассчитывается как произведение силы, действующей на единичную каплю, на величину счетной концентрации каплей  $n$ . При этом изменение размера капли учитывают по формуле (2), а вот влиянием испарения на силу аэродинамического сопротивления, как правило, пренебрегают. Покажем, что может привести к заметной погрешности расчета.

Если время стабилизации пограничного слоя частицы намного меньше, чем характерные времена изменения диаметра и скорости капли, то можно считать процесс ее движения квазистационарным и использовать поправку к коэффициенту сопротивления, предложенную Дуковичем [6] (рис. 1):

$$\eta \equiv \frac{C_R}{C_R^0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{f \cdot \text{Re}_n}{0,5 \text{Re}_n^2 - f}, \quad f = 1 - (1 + \text{Re}_n) \exp(-\text{Re}_n), \quad \text{Re}_n = \frac{V_n \delta}{\nu}, \quad (5)$$

где  $V_n$  – массовая скорость отделяющегося пара относительно капли.

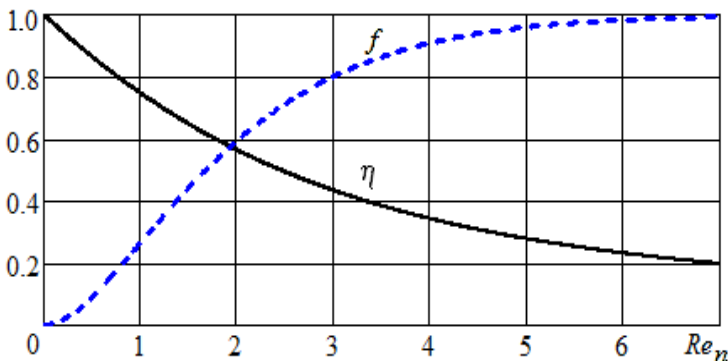


Рис. 1. Поправка Дуковича к силе аэродинамического сопротивления



Получим формулу для вычисления числа Рейнольдса пара  $Re_n$ .  
Скорость отделяющегося пара найдем по его потоку массы  $V_n = G_n / \rho_n$ , но

$$G_n \pi \delta^2 = -dm / dT. \quad (6)$$

Из (6) с учетом (3) следует:

$$V_n = 0,25 N \frac{\delta_0^2 \rho_p}{\delta \rho_n}. \quad (7)$$

По скорости (7) вычислим число Рейнольдса пара:

$$Re_n = 0,25 N \frac{\delta_0^2 \rho_p}{\nu \rho_n} = 4,5 N \frac{\delta_0^2}{18 \nu \lambda} \lambda_n = 4,5 n \lambda_n, \quad \lambda_n = \frac{\rho_f}{\rho_n}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получим, что коэффициент Дуковича уменьшается с ростом как безразмерной интенсивности испарения капли  $n$ , так и отношения плотностей  $\lambda_n$  (рис. 2).

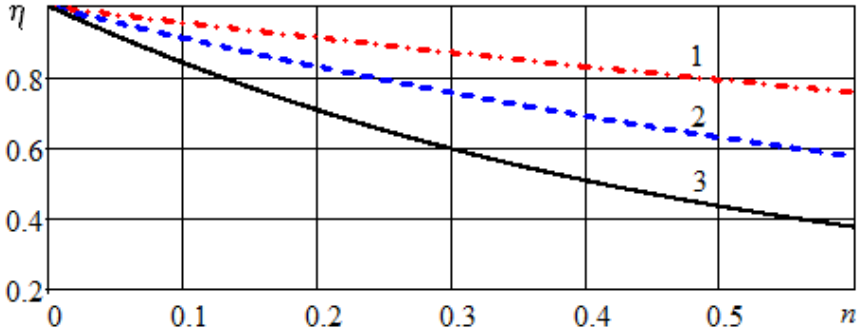


Рис. 2. Зависимость коэффициента Дуковича от безразмерной интенсивности испарения при различных значениях  $\lambda_n$ :  
1 –  $\lambda_n = 0,4$ ; 2 –  $\lambda_n = 0,5$ ; 3 –  $\lambda_n = 1,5$

Тогда основная составляющая силы межфазного взаимодействия – сила гидродинамического сопротивления – может быть вычислена по формуле, приведенной в [7].

В стационарном, однородном течении показатели затухания не должны зависеть от направления  $\theta_{Ei} = \theta_E$ , а сумма квадратов пульсационных скоростей равна удвоенной пульсационной энергии несущей среды  $k$ . Отсюда получается формула

$$\varepsilon_j = \frac{J}{\rho_f} \left( 2k - \sum_i \overline{V'_{fi} V'_{pi}} \right), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_j$  – одна из составляющих уравнения переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций, приведенных в [10].

С учетом полученных в [10] формул преобразуем (9):

$$\varepsilon_j = 2k \frac{J}{\rho_f} \exp(-\beta \theta_E). \quad (10)$$



Подставим в (10) выражение осредненной интенсивности испарения (5):

$$\varepsilon_J = 3k \cdot \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_f} \cdot \frac{\delta_0^2}{\delta^2} \cdot N \cdot \exp(-\beta \theta_E). \quad (11)$$

Учтем в формуле (11) зависимость размера испаряющейся капли от времени (2):

$$\varepsilon_J = 3k \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_f} \frac{N}{1 - Nt} \exp\left(-\frac{\beta_0 \theta_E}{1 - Nt}\right). \quad (12)$$

Введем безразмерные величины

$$\hat{\varepsilon}_J = \frac{\varepsilon_p \theta_E}{3k}, \quad \lambda = \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_f}, \quad n = \frac{N}{\beta_0}, \quad \tau = t \cdot \beta_0, \quad \tau_E = \theta_E \cdot \beta_0. \quad (13)$$

Выражая в (12) размерные величины через безразмерные (13), получим

$$\hat{\varepsilon}_J = \lambda \cdot \frac{n \cdot \tau_E}{1 - n \cdot \tau} \exp\left(-\frac{\tau_E}{1 - n \cdot \tau}\right). \quad (14)$$

На рисунке 3 видно, что безразмерная интенсивность снижения пульсационной энергии несущей среды из-за испарения капель  $\hat{\varepsilon}_J$  прямо пропорциональна отношению распределенной плотности дисперсной фазы и несущей фазы  $\lambda$ , зависит от инерционности включений, характеризующейся безразмерной величиной  $\tau_E = \beta_0 \theta_E$ . Максимум  $\hat{\varepsilon}_J$  достигается при  $\tau_E = 1$ . И при малоинерционных включениях ( $\tau_E \rightarrow \infty$ ), и при существенно инерционных ( $\tau_E \rightarrow 0$ ) величина  $\hat{\varepsilon}_J \rightarrow 0$ . Физическая сущность данного явления заключается в следующем: пульсационная энергия дисперсной фазы тем ниже турбулентной энергии несущей фазы, чем больше инерционность частиц (капель). Следовательно, испаряющаяся субстанция приходит в несущую среду с меньшей пульсационной энергией.

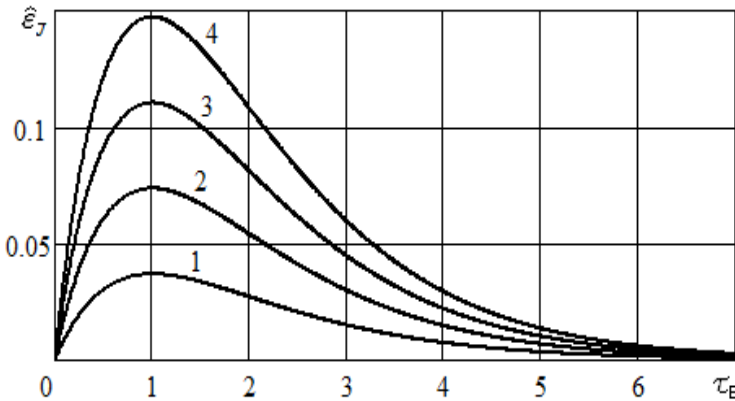
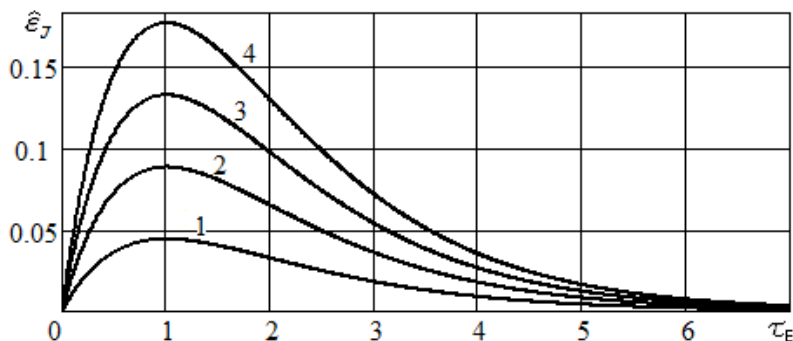


Рис. 3. Зависимость безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии от инерционности включений при  $\tau = 0$ ,  $n = 0,5$  и различной загрузке: 1 –  $\lambda = 0,2$ ; 2 –  $\lambda = 0,4$ ; 3 –  $\lambda = 0,6$ ; 4 –  $\lambda = 0,8$



Рисунки 4–7 иллюстрируют зависимость данного явления не только от относительной инерционности каплей, но и от безразмерной интенсивности испарения и времени процесса.



61

Рис. 4. Зависимость безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии от инерционности включений при  $\tau = 0$ ,  $\lambda = 0,6$  и различной интенсивности испарения:  
 1 –  $n = 0,2$ ; 2 –  $n = 0,4$ ; 3 –  $n = 0,6$ ; 4 –  $n = 0,8$

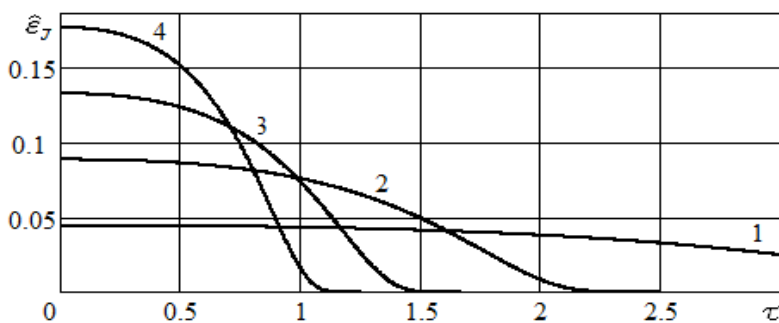


Рис. 5. Изменение безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии по времени при  $\tau_E = 1$ ,  $\lambda = 0,6$  и различной интенсивности испарения:  
 1 –  $n = 0,2$ ; 2 –  $n = 0,4$ ; 3 –  $n = 0,6$ ; 4 –  $n = 0,8$

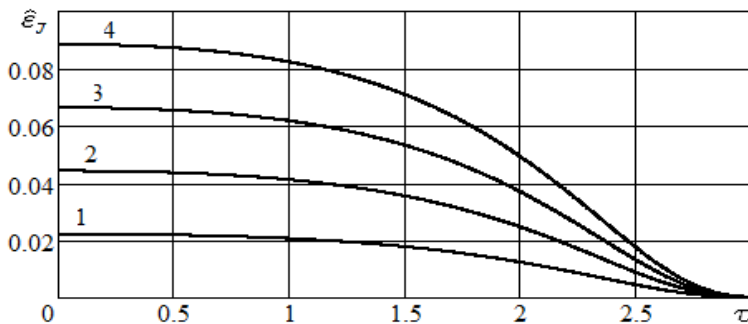


Рис. 6. Изменение безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии по времени при  $\tau_E = 1$ ,  $n = 0,3$  и различной нагрузке:  
 1 –  $\lambda = 0,2$ ; 2 –  $\lambda = 0,4$ ; 3 –  $\lambda = 0,6$ ; 4 –  $\lambda = 0,8$

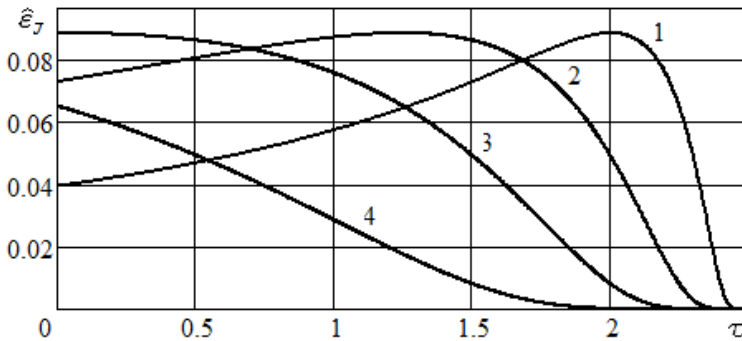


Рис. 7. Изменение безразмерной интенсивности снижения пульсационной энергии по времени при  $\lambda = 0,6$ ,  $n = 0,3$  и различной инерционности:  
1 –  $\tau_E = 0,2$ ; 2 –  $\tau_E = 0,2$ ; 3 –  $\tau_E = 1$ ; 4 –  $\tau_E = 2$

Строго говоря, формула (14) справедлива для сферических частиц в линейной области сопротивления. Увеличение размеров капель повлечет изменение их формы и коэффициента гидродинамического сопротивления. Но качественная картина явления при этом не изменится, хотя количественные отличия могут быть существенными. Значительная нагрузка потока испаряющимися каплями вызовет рост величины  $\hat{\epsilon}_J$ , что приведет к уменьшению турбулентной энергии несущей среды.

### Список литературы

1. Wu Z.H., Liu X.D. Simulation of spray drying of a solution atomized in a pulsating flow // *Drying Technology*. 2002. Vol. 20, №6. P. 1101–1121.
2. Kaiser A.S., Lucas M., Vledma A., Zamora B. Numerical model of evaporative cooling processes in a new type of cooling tower // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2005. Vol. 48, №5. P. 986–999.
3. Наумов В.А. Динамика дисперсных частиц в вязкой среде : монография. Калининград, 2016.
4. Войтков И.С., Волков Р.С., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Высокотемпературное испарение капель воды в газовой среде // *Журнал технической физики*. 2017. Т. 87, №12. С. 1911–1914.
5. Пахомов М.А., Терехов В.И. Влияние испарения капель на структуру течения и тепломассообмен в ограниченном закрученном газок капельном потоке за его внезапным расширением // *Теплофизика и аэромеханика*. 2018. №6 (114). С. 865–875.
6. Наумов В.А., Великанов Н.Л. Моделирование движения капель в системах охлаждения поверхности распыленной жидкостью // *Известия Калининградского государственного технического университета*. 2019. №53. С. 169–181.
7. Нугматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.
8. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. *Turbulent flows in gas suspensions*. N. Y., 1990.
9. Crowe C.T., Sommerfeld M., Tsuji Y. *Flows with Droplets and Particles*. Florida, 1998.



10. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Моделирование турбулентного течения вязкой жидкости с дисперсными включениями близкой плотности // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2019. №1. С. 72–80.

#### Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

#### The authors

Prof. Nikolay L. Velikanov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Prof. Vladimir A. Naumov, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey I. Koryagin, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

А. А. Зайцев, А. И. Руденко, С. М. Алексеева

## ПЕРВЫЙ МЕТОД СТОКСА В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

64

Получено приближенное решение задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной периодической волны на поверхности жидкости конечной глубины. Способ решения: сначала упрощаются кинематическое и динамическое условия (упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли), вводится интегральный оператор типа свертки, определяются четыре функции одной переменной, основной из которых является уровень волны. В результате получены одно линейное и три квадратичных уравнения, определены и обоснованы условия нулевого среднего для уровня и относительной функции тока, а также условие ортогональности уровня волны основной гармонике. Как у Стокса, неизвестные функции и параметры ищутся в виде разложений по безразмерному волновому числу. Получено нелинейное дисперсионное соотношение. Выполнен анализ решений. Рассмотрены случаи коротких и длинных волн.

*An approximate solution of the problem of the structure and characteristics of a stationary nonlinear periodic wave on the surface of a liquid of finite depth has been obtained. The solution is as follows: first, the kinematic and dynamic conditions are simplified. The Bernoulli integral contributes to the simplification of the dynamic condition. An integral operator of convolution type is introduced. Four functions of one variable are determined, the main of which is the wave level. One linear and three quadratic equations are obtained. The zero mean conditions for the level and the relative function of the current, as well as the condition of orthogonality of the wave level and the fundamental harmonic, are determined and validated. Like Stokes did, we seek unknown functions and parameters as expansions in a dimensionless wave number. The nonlinear dispersion relation has been obtained. The decision analysis has been completed. The cases of short and long waves have been considered.*

**Ключевые слова:** стационарные периодические потенциальные гравитационные волны на поверхности жидкости, первый метод Стокса.

**Keywords:** stationary periodic potential gravitational waves on the surface of a liquid, the first Stokes' method.

### Введение

Джон Скотт Рассел в 1834 г. наблюдал уединенную волну большой амплитуды, которая быстро перемещалась по узкому каналу, не изменяя своей формы [1; 2]. Сущность наблюдения Скотта Рассела понял





Джордж Габриель Стокс, который создал основы теории стационарной нелинейной периодической волны [3]. Он сформулировал точную математическую постановку нелинейной краевой задачи о стационарной волне на поверхности идеальной жидкости. Эта задача не имеет точного аналитического решения, поэтому Стокс разработал специальный вариант теории возмущений и выполнил расчет первых трех приближений для случая жидкости бесконечной глубины (случай жидкости конечной глубины намного сложнее, и Стокс, а также его последователи его не рассматривали). Стоксом найдена первая нелинейная поправка к зависимости скорости волны от длины и амплитуды (в первом приближении получается линейное дисперсионное соотношение). Эта зависимость такова:

$$c^2 = \frac{g}{k}(1 + (ka)^2),$$

где  $k$  — волновое число;  $a$  — амплитуда волны.

Позже Стокс предложил второй метод решения задачи о стационарной волне [4], суть которого в том, что исходная нелинейная краевая задача отображается на полосу в плоскости комплексного переменного. Новая краевая задача остается нелинейной, но оказывается существенно проще исходной задачи, поскольку обе границы становятся прямолинейными. В литературе появились достаточно работ, например [5–12], в которых второй метод Стокса был усовершенствован и были выполнены расчеты высших приближений. Заметим, что в работах [6; 10; 11] выведено интегро-дифференциальное уравнение для профиля стационарной волны. Теоретическое обоснование наблюдений Скотта Рассела дано в [13; 14]. Теоремы существования стационарной периодической волны конечной амплитуды, а также уединенной волны сформулированы и доказаны в [15–18]. Изложение результатов исследования стационарной периодической волны конечной амплитуды и уединенной волны содержатся в монографиях [19; 20]. Оригинальные подходы к теории стационарной волны конечной амплитуды даны в [19; 21]. Однако, принимая во внимание второй метод Стокса, заметим, что он искажает длину и профиль волны, а глубина жидкости фактически заменена на неизвестный параметр. Недочет второго метода заставил нас вернуться к первоначальному подходу Стокса к решению задачи о стационарной нелинейной волне. Как и Стокс, мы ограничиваемся расчетом трех низших приближений, но делаем это для жидкости конечной глубины.

Для достижения цели нам пришлось видоизменить методику Стокса. Прежде всего мы упростили математическую постановку задачи путем введения относительной функции тока (Стокс и его последователи использовали потенциал скоростей, что усложняет процедуру решения) и преобразования кинематического и динамического граничных условий. Упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли. Введен интегральный оператор типа свертки. Определены четыре функции одной переменной, основной из которых является про-



филь стационарной волны. Благодаря этому задача о нелинейной стационарной волне сводится к решению одного линейного и трех квадратичных уравнений.

Уравнения динамики жидкости дополнены условиями нулевого среднего для уровня и относительной функции тока. Условие нулевого среднего для уровня фактически определяет глубину жидкости. Условие нулевого среднего для относительной функции тока означает, что дрейф волны отсутствует и, значит, это условие позволяет получить реальное значение для скорости волны.

Для решения используются разложения по степеням произведения  $ka$ . Приняты условие ортогональности второго и третьего приближений основной гармонике. Это условие однозначно определяют решение трех систем уравнений для трех низших приближений. Получено решение этих систем.

66

### Постановка задачи

Требуется изучить строение и характеристики стационарной нелинейной волны на поверхности идеальной жидкости глубины  $h$ . Жидкость считается однородной и несжимаемой, а волновые движения — двумерными и безвихревыми (то есть потенциальными). Используются стандартные обозначения:  $x$  и  $y$  — абсцисса и ордината прямоугольной системы координат;  $u$ ,  $v$  — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости частиц жидкости;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\eta$  — профиль волны;  $c$  — скорость волны. Система координат выбирается так, чтобы ось  $x$  совпадала со средним уровнем жидкости, а ось  $y$  была направлена вертикально вверх.

Дно жидкости считается горизонтальным, абсолютно твердым и совпадающим с прямой  $y = -h$ . На дне выполняется условие непротекания.

Требование стационарности движения означает, что неизвестные функции  $\eta$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  зависят от координат  $x$ ,  $y$  и времени  $t$  следующим образом:

$$\eta = \eta(x - ct), \quad u = u(x - ct, y), \quad v = v(x - ct, y), \quad p = p(x - ct, y).$$

Отметим, что функция  $\eta = \eta(x)$  описывает профиль стационарной волны.

Изучаемые волны считаются периодическими по переменной  $x$ . Длина волны равна  $L$ . Условия периодичности имеют вид

$$\eta = \eta(x + L) = \eta(x), \quad u(x + L, y) = u(x, y), \quad v(x + L, y) = v(x, y), \\ p(x + L, y) = p(x, y).$$

Кроме того, профиль волны должен подчиняться условию нулевого среднего,  $\langle \eta(x) \rangle = 0$ . Для определенности принято условие нулевого среднего значения для горизонтальной составляющей скорости частиц жидкости,  $\langle u(x, y) \rangle = 0$ .



Упрощает математическую постановку задачи относительная функция тока и специальный линейный оператор типа свертки. Относительная функция тока определяется равенствами  $u = c\psi_y, v = -c\psi_x$ . Из этого определения следует, что относительная функция тока периодическая по переменной  $x$  и удовлетворяет условию нулевого среднего, этим же условиям удовлетворяет функция  $\psi(x) = \psi(x, 0)$ .

*Замечание 1.* Именно функция одной переменной  $\psi(x)$ , а не функция двух переменных  $\psi(x, y)$  будет использована в нашем способе решения рассматриваемой задачи. Функцию  $\psi(x)$  естественно назвать относительной функцией тока на среднем горизонте (ОФТСГ).

Решению задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной волны содействует специальный линейный оператор, который определим следующим образом.

**Определение 1.** Пусть функция  $\psi = \psi(x, y)$  является гармонической в полосе  $-h < y < 0$  и удовлетворяет следующим двум условиям на границе полосы:

$$\psi(x, y) = 0 \text{ при } y = -h, \quad \psi(x, y) = \psi(x) \text{ при } y = 0, \quad (1)$$

где  $\psi(x)$  — ограниченная непрерывная функция. Тогда действие оператора  $V$  на функцию  $\psi(x)$  выражается равенством

$$V(\psi(x)) = \psi_y(x, 0). \quad (2)$$

Несложно найти результат действия оператора  $V$  на косинусы.

**Утверждение 1.** Для действия оператора  $V$  на косинус справедливо равенство

$$V(\cos(kx)) = k R \cos(kx), \quad R = \text{cth}(kh). \quad (3)$$

Для доказательства достаточно решить задачу определения гармонической функции, удовлетворяющей граничным условиям (1), где  $\psi(x) \cos(kx)$ . Решение этой простой задачи приводит к формуле

$\psi(x, y) = \cos(kx) \frac{\text{sh}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)}$ , откуда с помощью формулы (2) получаем равенство (3).

*Замечание 2.* Можно доказать путем решения краевой задачи, сформулированной в определении 1, что для действия оператора  $V$  на произвольную непрерывную ограниченную функцию  $\psi(x)$  справедлива формула

$$V(\psi(x)) = G(x) * \psi(x),$$

где  $G(x) = G_y^*(x, 0)$ ,  $G^*(x, y) = -\frac{1}{2h} \frac{\sin(\frac{\pi y}{h})}{\text{ch}(\frac{\pi x}{h}) - \cos(\frac{\pi y}{h})}$ .



Таким образом, оператор  $V$  является интегральным оператором типа свертки.

Нам потребуются еще один факт, относящийся к функциям, удовлетворяющим условию нулевого среднего.

**Утверждение 2.** Пусть функция  $\psi(x)$  будет периодической и удовлетворяет условию нулевого среднего. Тогда функция  $\xi(x) = V(\psi(x))$  также является периодической и удовлетворяет условию нулевого среднего.

Обобщение этого утверждения такое (оно потребуется в пункте 3).

**Утверждение 3.** Для действия оператора  $V$  на косинусы  $\cos(2kx)$  и  $\cos(3kx)$  имеют место формулы

$$V(\cos(2kx)) = kR^{-1}(R^2 + 1)\cos(2kx), \quad (4)$$

$$V(\cos(3kx)) = 3k(3R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 3)\cos(3kx). \quad (5)$$

### Преобразование кинематического и динамического условий. Динамическая глубина

В этом пункте будет выполнено преобразование кинематического и динамического условий. Это поможет сформулировать рациональную математическую постановку задачи о стационарной нелинейной волне на поверхности идеальной жидкости.

Преобразованная форма кинематического условия получается интегрированием стандартной формы этого условия, что дает равенство

$$-\eta(x) + \psi(x, \eta(x)) = \text{const}. \quad (6)$$

Выполнив расчет объемного расхода жидкости через каждую вертикаль, получаем равенство  $Q = -\eta(x) + \psi(x, \eta(x))$ . Учитывая, что в отсутствие волн  $Q = ch$ , введем такое обозначение для расхода жидкости при наличии волн:

$$Q = cd. \quad (7)$$

Параметр  $d$  назовем динамической глубиной.

Из формул (6) и (7) следует соотношение

$$-\eta(x) + \psi(x, \eta(x)) = d - h. \quad (8)$$

Разлагая левую часть соотношения (8) в ряд Маклорена с точностью до слагаемого третьего порядка малости, получаем следующее приближенное равенство:

$$-\eta(x) + \eta(x)\xi(x) - \frac{1}{2}H_2(x)\psi''(x) = d - h. \quad (9)$$



Здесь обозначено

$$\psi(x) = \psi(x, 0), \quad \xi(x) = \psi_y(x, 0) = V(\psi(x)), \quad H_2(x) = \eta^2(x) \quad (10)$$

и учтено, что в силу гармоничности функции  $\psi(x, y)$  справедливо равенство  $\psi_{yy}(x, 0) = \psi''(x)$ .

Равенство (9) будет первым уравнением в математической постановке рассматриваемой задачи.

Динамическое условие с помощью интеграла Бернулли и разложения в ряд Маклорена с точностью до слагаемого третьего порядка малости принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} P + (-s\eta(x) + \xi(x)) - \eta(x)\psi''(x) - \frac{1}{2}(\psi'(x))^2 - \frac{1}{2}\xi^2(x) + \\ + \eta(x)(\psi''(x)\xi(x) - \psi'(x)\xi'(x)) - \frac{1}{2}H_2(x)\xi''(x) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь обозначено

$$s = \frac{g}{c^2}. \quad (12)$$

Равенство (11) будет вторым уравнением в математической постановке рассматриваемой задачи.

Теперь можно сформулировать математическую постановку рассматриваемой задачи. Это делается объединением уравнений (9) и (11), а также второго и третьего из равенств (10).

Математическая постановка задачи. Требуется найти приближенные значения параметров  $s$ ,  $d$ ,  $P$  и выражения для функций  $\eta(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\xi(x)$ ,  $H_2(x)$ , которые подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} -\eta(x) + \psi(x) + \eta(x)\xi(x) - \frac{1}{2}H_2(x)\psi''(x) &\equiv d - h, \\ P + (-s\eta(x) + \xi(x)) - \eta(x)\psi''(x) - \frac{1}{2}(\psi'(x))^2 - \frac{1}{2}\xi^2(x) + \\ + \eta(x)(\psi''(x)\xi(x) - \psi'(x)\xi'(x)) - \frac{1}{2}H_2(x)\xi''(x) &\equiv 0, \\ \xi(x) = V(\psi(x)), \quad H_2(x) = \eta^2(x) & \quad (13) \end{aligned}$$

и условиям периодичности и нулевого среднего.

Отметим особенность нашего подхода к решению задачи: математическая постановка содержит только четыре относительно простых уравнений для четырех функций одной независимой переменной. Приближенное решение уравнений (13) ищется в виде разложений по степеням безразмерного волнового числа. Эти разложения таковы:



$$\begin{aligned}
s &\equiv ks_0(1 + s_1(ka) + s_2(ka)^2), \\
\eta(x) &\equiv k^{-1}(\cos(kx)(ka) + \eta_2(x)(ka)^2 + \eta_3(x)(ka)^3), \\
\psi(x) &\equiv k^{-1}(\psi_1(x)(ka) + \psi_2(x)(ka)^2 + \psi_3(x)(ka)^3), \\
\xi(x) &\equiv \xi_1(x)(ka) + \xi_2(x)(ka)^2 + \xi_3(x)(ka)^3, \\
H_2(x) &\equiv k^{-2}H_{22}(x)(ka)^2, \\
d &\equiv h + d_1(ka) + d_2(ka)^2 + d_3(ka)^3, \\
P &\equiv P_1(ka) + P_2(ka)^2 + P_3(ka)^3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Функции  $\eta_2(x)$ ,  $\eta_3(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_3(x)$  считаются периодическими с периодом  $L = 2\pi/k$ . Следствием этой периодичности является периодичность функций  $\xi_1(x)$ ,  $\xi_2(x)$ ,  $\xi_3(x)$ ,  $H_{22}(x)$ . Ряд Фурье для функций  $\eta_2(x)$  и  $\eta_3(x)$  не содержит слагаемого, пропорционального  $\cos(kx)$  ввиду условия ортогональности этих функций основной гармонике.

Разложения для функции  $\eta_2(x)$  и параметра  $d$  учитывают, что в линейном приближении  $\eta(x) = a \cos(kx)$ ,  $d = h$ .

### Системы уравнений для трех низших приближений и их решение

В этом пункте выполняется процедура вывода систем уравнений для трех низших приближений. Сначала делается подстановка степенных рядов (14) в уравнения (13), которые расщепляются. Это дает четыре семейства уравнений, которые сгруппированы в три системы уравнений для трех низших приближений. Результат такой:

– система уравнений линейного приближения:

$$\psi_1(x) = \cos(kx), \xi_1(x) = s_0 \cos(kx), \xi_1(x) - k^{-1}V(\psi_1(x)) = 0;$$

– система уравнений второго приближения:

$$\begin{aligned}
-\eta_2(x) + \psi_2(x) &= B_{21}(x) + d_2, -s_0\eta_2(x) + \xi_2(x) = \\
&= B_{22}(x) - P_2, \xi_2(x) - k^{-1}V(\psi_2(x)) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$B_{21}(x) = -\cos(kx) \cdot \xi_1(x),$$

$$B_{22}(x) = s_0 s_1 \cos(kx) + k^{-2} \left( \frac{1}{2} (\psi_1'(x))^2 + \cos(kx) \psi_1''(x) \right) + \frac{1}{2} \xi_1^2(x);$$

– система уравнений третьего приближения:

$$\begin{aligned}
-\eta_3(x) + \psi_3(x) &= B_{31}(x) + d_2, -s_0\eta_3(x) + \xi_3(x) = \\
&= B_{32}(x) - P_3, \xi_3(x) - k^{-1}V(\psi_3(x)) = 0,
\end{aligned}$$



где

$$B_{31}(x) = -\eta_2(x)\xi_1(x) - \cos(kx)\xi_2(x) + \frac{1}{2}k^{-2}H_{22}(x)\psi_1''(x),$$

$$B_{32}(x) = s_0(s_2 \cos(kx) + s_1\eta_2(x)) + k^{-2}(\eta_2(x)\psi_1''(x) + \psi_1'(x)\psi_2'(x) + \cos(kx)\psi_2''(x) - \cos(kx)(\psi_1''(x)\xi_1(x) - \psi_1'(x)\xi_1'(x))) + \frac{1}{2}H_{22}(x)\xi_1''(x) + \xi_1(x)\xi_2(x),$$

$$H_{22}(x) = \frac{1}{2}k^{-2}(1 + \cos(2kx)).$$

Эти уравнения необходимо дополнить условиями периодичности и нулевого среднего для функций  $\eta_2(x)$ ,  $\eta_3(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_3(x)$ ,  $\xi_1(x)$ ,  $\xi_2(x)$  и  $\xi_3(x)$ .

Решение системы уравнений линейного приближения имеет вид

$$\psi_1(x) = \cos(kx), \xi_1(x) = R \cdot \cos(kx), s_0 = R.$$

*Замечание 4.* Следствием значения параметра  $s_0$  и равенства (12) является хорошо известное линейное дисперсионное соотношение

$$c = \sqrt{\frac{g \operatorname{th}(kh)}{k}}.$$

Значение  $s_0$  позволит упростить вторые уравнения систем уравнений второго и третьего приближений. В свое время это будет сделано.

Переходим к решению системы уравнений второго приближения. Для этого сначала необходимо выполнить процедуры приведения исходных выражений функций  $B_{21}(x)$  и  $B_{22}(x)$  к косинус-многочленам. Выполнение этих процедур дает следующий результат:

$$B_{21}(x) = -\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R \cos(2kx),$$

$$B_{22}(x) = \frac{1}{2^2}(R^2 - 1) + R \cdot s_1 \cos(kx) + \frac{1}{2^2}(R^2 - 3) \cos(2kx).$$

Благодаря найденным выражениям значению параметра  $s_0$  система уравнений второго приближения становится следующей:

$$-\eta_2(x) + \psi_2(x) = d_2 - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R \cos(2kx),$$

$$-R\eta_2(x) + \xi_2(x) = -P_2 + \frac{1}{2^2}(R^2 - 1) + R \cdot s_1 \cos(kx) + \frac{1}{2^2}(R^2 - 3) \cos(2kx),$$

$$\xi_2(x) - k^{-1}V(\psi_2(x)) = 0.$$

Поскольку функции  $\eta_2(x)$ ,  $\psi_2(x)$  и  $\xi_2(x)$  должны подчиняться условию нулевого среднего, то параметры  $d_2$  и  $P_2$  должны иметь следующие значения:

$$d_2 = \frac{1}{2}R, P_2 = \frac{1}{2^2}(R^2 - 1).$$

Оба параметра имеют положительные значения.



Положительность значения параметра  $d_2$  означает, что объемный расход жидкости, переносимой нелинейной волной, больше расхода жидкости, переносимой линейной волной. Кроме того, выражение для параметра  $d_2$  показывает, что объемный расход жидкости, переносимой нелинейной волной, увеличивается с ростом амплитуды волны.

Благодаря найденным значениям параметров  $d_2$  и  $P_2$  система уравнений второго приближения упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} -\eta_2(x) + \psi_2(x) &= -\frac{1}{2}R \cos(2kx), \\ -R\eta_2(x) + \xi_2(x) &= R \cdot s_1 \cos(kx) + \frac{1}{2^2}(R^2 - 3) \cos(2kx), \\ \xi_2(x) - k^{-1}V(\psi_2(x)) &= 0. \end{aligned}$$

72

Ясно, что решение этой системы уравнений следует искать в виде следующих выражений:

$$\eta_2(x) = \eta_{22} \cos(2kx), \quad \psi_2(x) = \psi_{22} \cos(2kx), \quad \xi_2(x) = \xi_{22} \cos(2kx). \quad (15)$$

Для того чтобы найти значения коэффициентов  $\eta_{22}$ ,  $\psi_{22}$  и  $\xi_{22}$ , следует подставить выражения (15) в систему уравнений второго приближения. Эта процедура, использующая равенство (4), приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= \frac{1}{2^2}R(3R^2 - 1) \cos(2kx), \quad \psi_2(x) = \frac{3}{2^2}R(R^2 - 1) \cos(2kx), \\ \xi_2(x) &= \frac{3}{2^2}(R^4 - 1) \cos(2kx), \quad s_1 = 0. \end{aligned}$$

Переходим к решению системы уравнений третьего приближения. Действуя как в предыдущем случае, с помощью равенства (5) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \eta_3(x) &= \frac{3}{2^6}R(3R^2 - 1)(3R^4 + 1) \cos(3kx), \\ \psi_3(x) &= \frac{1}{2^3}R^2(6R^2 - 1) \cos(kx) + \frac{1}{2^6}R(R^2 - 1)(3R^2 + 1)(9R^2 - 13) \cos(3kx), \\ \xi_3(x) &= \frac{1}{2^3}R^3(6R^2 - 1) \cos(kx) + \frac{3}{2^6}R^2(R^2 - 1)(R^2 + 3)(9R^2 - 13) \cos(3kx), \\ s_2 &= \frac{1}{2^3}R(9R^4 - 10R^2 + 9). \end{aligned}$$

Решение систем уравнений для трех низших приближений завершено.

Результаты решения систем уравнений для трех низших приближений дают следующие выражения для уровня свободной поверхности, образуемого стационарной нелинейной периодической волной, ОФТСР, а также значения параметра  $s$ , динамической глубины и параметра  $P$ .





Выражение уровня свободной поверхности, образуемого стационарной нелинейной периодической волной и ОФТСГ:

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{1}{2^2} k R (3R^2 - 1) a^2 \cos(2kx) + \frac{3}{2^6} k^2 R (3R^2 - 1) (3R^4 + 1) a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2} k R (R^2 - 1) a^2 \cos(2kx) - \frac{1}{2^3} k^2 R^2 (6R^2 - 1) a^3 \cos(kx) +$$

$$+ \frac{1}{2^6} k^2 R (R^2 - 1) (3R^2 + 1) (9R^2 - 13) a^3 \cos(3kx).$$

Значения параметра  $s$ , динамической глубины и параметра  $P$ :

$$s \equiv k R \left(1 - \frac{1}{2^3} R (9R^4 - 10R^2 + 9) (ka)^2\right), \quad d \equiv h + \frac{1}{2} R (ka)^2, \quad P = \frac{1}{2^2} (R^2 - 1) (ka)^2.$$

### Нелинейное дисперсионное соотношение

Воспользовавшись соотношением (12), которое связывает скорость волны и параметр  $s$ , и приближенным выражением для параметра  $s$ , получаем нелинейное дисперсионное соотношение, которое имеет следующий вид:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k R}} \left(1 + \frac{1}{2^4} R (9R^4 - 10R^2 + 9) (ka)^2\right).$$

Это выражение показывает, что скорость нелинейной стационарной волны растет с ростом ее амплитуды. Для уединенной волны это свойство обнаружил Скотт Рассел.

### Строение и характеристики коротких и длинных волн

Короткие волны на поверхности жидкости конечной глубины можно рассматривать так же, как волны произвольной длины на поверхности жидкости бесконечной глубины.

В случае коротких волн  $kh \gg 1$ , поэтому  $R \approx 1$ . Тогда выражения уровня свободной поверхности, образуемого короткой стационарной нелинейной периодической волной, и ОФТСГ таковы:

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{1}{2} k a^2 \cos(2kx) + \frac{3}{2^3} k^2 a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a \left(1 - \frac{5}{2^3} (ka)^2\right) \cos(kx).$$

Значения динамической глубины и параметра  $P$ :

$$d - h \equiv \frac{1}{2} (ka)^2, \quad P = 0.$$

Нелинейное дисперсионное соотношение:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k R}} \left(1 + \frac{1}{2} (ka)^2\right).$$



В случае длинных волн  $kh \ll 1$ , поэтому  $R \approx (kh)^{-1}$ . Тогда выражение уровня свободной поверхности, выражение ОФТСГ, значения динамической глубины и параметра  $P$ , а также нелинейное дисперсионное соотношение принимают следующий вид:

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2 k^2 h^3} a^2 \cos(2kx) + \frac{3^3}{2^6 k^5 h^7} a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2 k^2 h^3} a^2 \cos(2kx) - \frac{5}{2^3 k^2 h^4} a^3 \cos(kx) + \frac{3^3}{2^6 k^5 h^7} a^3 \cos(3kx),$$

$$d \equiv h + \frac{1}{2h} ka^2, P = \frac{1}{2^2 h^2} a^2, c = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3^2}{2^4 k^3 h^5} a^2\right).$$

74

Замечание 5. В формулах этого пункта следует считать, что  $\frac{a}{kh^2} \ll 1$ .

### Заключение

Получено приближенное решение задачи о стационарной нелинейной волне на поверхности жидкости конечной глубины. Нами модифицирован первый метод Стокса. Особенности нашего метода: упрощены кинематическое и динамическое граничные условия, введен интегральный оператор типа свертки, определены четыре функции одной переменной, основной из которых является профиль стационарной волны. Благодаря этому рассматриваемая задача сведена к решению трех систем уравнений для трех низших приближений. Эти системы дополняются условием нулевого среднего для уровня и ОФТСГ, а также условием ортогональности уровня основной гармонике.

### Список литературы

1. Scott Russel J. Report on waves // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. L., 1845. P. 311–390.
2. Scott Russel J. The Wave of Translation. L., 1885.
3. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Cambr. Trans. 1847. Vol. 8. P. 443–473.
4. Stokes G.G. Math. Phys. Papers. 1880.
5. Shwartz B. Journal of Fluid Mechanics. 1974.
6. Бабенко К.И. Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Доклады АН СССР. 1987. Т. 29, №5. С. 1033–1037.
7. Karabut E.A. An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 372. P. 45–70.
8. Карабут Е.А. О суммировании ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, №1. С. 44–54.
9. Карабут Е.А. Высшие приближения теории кноидальных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, №1. С. 92–104.
10. Zaitsev A.A., Rudenko A.I. Stationary waves on the shear stream // Тезисы докладов Междунар. конф. по избранным трудам современной математики, приуроченной к 200-летию со дня рождения К.Г. Якоби. Калининград, 2005. С. 267–268.



11. Зайцев А. А., Руденко А. И. К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, №3. С. 43–49.
12. Руденко А. И. Нелинейные стационарные волны на сдвиговом горизонтальном течении жидкости : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Калининград, 2007.
13. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent // Jour. Math. Pures Appl. 1872. Vol. 17, №2. P. 55–108.
14. Korteweg D. J., Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443.
15. Некрасов А. И. О волнах установившегося вида // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. 1921. №3. С. 52–65.
16. Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes irrotationnelles d'amplitude finie // Mathematical Annales. 1925. Vol. 93. P. 264–313.
17. Красовский Ю. П. Теория установившихся волн конечной амплитуды // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. С. 836–855.
18. Тер-Крикоров А. М. Существование периодических волн, вырождающихся в единенную // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 622–636.
19. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1984.
20. Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.
21. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории нелинейных поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985.

#### Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Алексей Иванович Руденко — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Светлана Михайловна Алексеева — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru

#### The authors

Dr Anatoly A. Zaitsev, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Alexey I. Rudenko, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Svetlana M. Alekseeva, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru

**В. Е. Пониматкин, С. Г. Шпилева  
В. А. Гоглев, Б. И. Каскевич**

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕДАЮЩИХ АНТЕННЫХ СИСТЕМ СДВ- И ДВ-ДИАПАЗОНОВ**

76

*Работа относится к области радиотехники и посвящена поиску путей усовершенствования передающих антенн СДВ- и ДВ-диапазонов на основе исследования электродинамических свойств с возможностью совершенствования их конструктивных, массо-габаритных и излучающих параметров. Данные диапазоны широко используются для связи с подвижными объектами в зонах с высокой магнитной активностью, а также в морских проливных зонах; для пеленгации излучений при определении местоположения самолета или судна. Результаты работы могут найти практическое применение при решении задач повышения безопасности движения морских и воздушных судов.*

*This work is related to the field of radio engineering and is devoted to the search for ways to improve the transmission antennas of the SDV- and DV-bands based on the study of electrodynamic properties with the possibility of improving their design, mass-dimensional and radiating parameters. These ranges are widely used for communication with mobile objects in areas with high magnetic activity, as well as in Maritime Strait zones; for direction finding of radiation when determining the location of an aircraft or vessel. The results of the work can find practical application in solving problems of improving the safety of sea and air traffic.*

**Ключевые слова:** передающая антенна, массогабаритные показатели, входное сопротивление, элементарный магнитный излучатель, несимметричный вибратор, компланарные линии.

**Keywords:** transmitting antenna, mass and size parameters, input resistance, elementary magnet emitter, asymmetric vibrator, coplanar lines.

Диапазоны сверхдлинных (СДВ) и длинных (ДВ) волн охватывают частоты от  $f=3$  кГц до  $f=300$  кГц ( $\lambda=100$  км —  $\lambda=1$  км). Радиоволны СДВ- и ДВ-диапазонов распространяются в волноводе, образованным двумя сферическими поверхностями: поверхностью Земли с малой проводимостью и слоем Д или С ионосферы, в зависимости от времени суток. Силовые линии электрического поля распространяемой электромагнитной волны опираются на земную поверхность, что определяет вертикальную поляризацию основного излучения. В связи с этим антенны для данных диапазонов должны создавать вертикальную составляющую излучаемого поля. Соответственно, работа в данных диапазонах осуществляется Г-, Т-образными и зонтичными антеннами, высота которых достигает 300 м в зависимости от излучаемых частот.

Это связано с тем, что наилучшим для их работы является режим собственной длины волны, когда высота антенны  $l$  связана с длиной волны  $\lambda$  соотношением  $l = \lambda / 4$ . Исходя из реальных размеров отноше-



ние длины антенны к длине излучаемой волны составляет сотые и тысячные единицы ( $l/\lambda = 0,012 \div 0,008$ ). Подставляя данные значения в формулу для определения сопротивления излучения  $R_{\Sigma} = 1600(l_{\text{Д}}/\lambda)^2$ , где  $l_{\text{Д}}$  — действующая высота антенны, причем  $l_{\text{Д}}/\lambda \ll 1$ , видим, что  $R_{\Sigma}$  чересчур мало. Следовательно, и мощность излучения будет низкой [1].

Как следует из рисунка 1, а, эпюра распределения тока  $I_A$  вдоль длины плеча несимметричного вибратора  $l$  имеет форму треугольника. Наилучшим случаем является четверть-волновое распределение тока, но для этого необходимо иметь высоты антенн от 25 км в СДВ-диапазоне и до 250 м в ДВ-диапазоне. Выполнить данные условия практически невозможно, поэтому реализуют соотношение  $l_{\text{Д}}/\lambda \ll 1$ . Для увеличения тока в эмпоре вертикальной части используют горизонтальную часть в виде Г-образной формы (рис. 1, б).

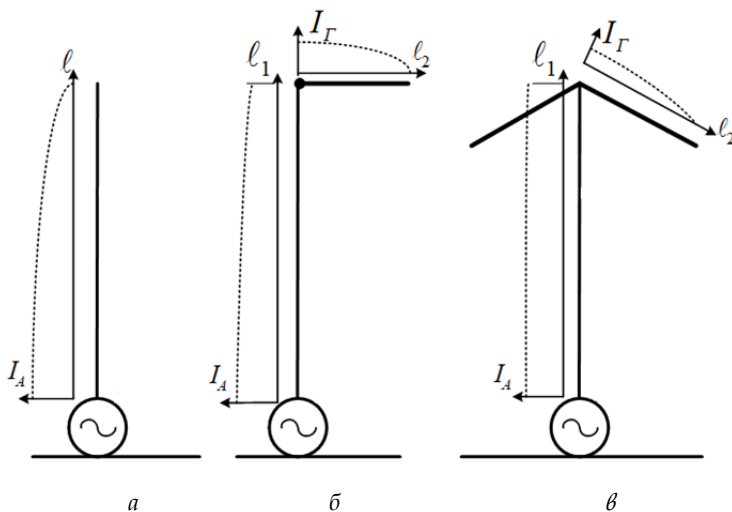


Рис. 1. Эпюры токов в антенных системах различного типа:  
 а — вертикальный несимметричный вибратор; б — Г-образная антенна;  
 в — зонтичная антенна

Наилучшая эпюра тока, имеющая практически прямоугольную форму, наблюдается у зонтичной антенны (рис. 1, в). Однако массогабаритные характеристики данной разновидности очень высокие. Достаточно сказать, что 300-метровые опоры, поддерживающие полотно антенн, представляют дорогостоящую и очень сложную конструкцию.

Отсюда целью данной работы является определение конструктивных особенностей, обеспечивающих снижение массогабаритных характеристик антенны. Это становится возможным, если использовать в качестве излучающих элементов рамочные системы. Однако последние имеют существенный недостаток: сопротивление излучения для вертикальных антенн, представленных на рисунке 1, равно  $R_{\Sigma} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2$ , в то время как для рамочных — на два порядка меньше:  $R_{\Sigma} = 360\pi^2 (l/\lambda^2)^2$ .



При этом увеличение сопротивления излучения рамки возможно на основании увеличения числа витков или действующей высоты антенны. Используем это обстоятельство в целях усовершенствования антенных конструкций. Известно, что горизонтально и вертикально расположенные рамочные антенны многовитковой конструкции (рис. 2) формируют вертикальный  $\vec{H}_B$  и горизонтальный  $\vec{H}_G$  магнитные векторы соответственно, а электрический вектор  $\vec{E}_G$ , возбуждаемый переменным током  $I_A$ , всегда остается горизонтальным. Создать вертикальный электрический вектор для возбуждения в обоих случаях не удастся.

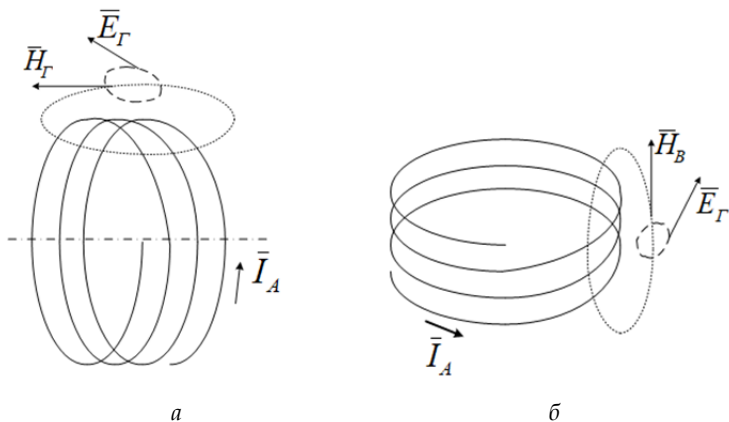


Рис. 2. Схематические изображения многовитковых антенных систем с компонентами создаваемого ими электромагнитного поля:  
а – вертикально расположенная рамочная антенна;  
б – горизонтально расположенная рамочная антенна

Рамочные антенны, расположенные под углом  $45^\circ$  к поверхности Земли с противоположным наклоном относительно друг друга (рис. 3), могут создавать суммарный вертикальный вектор  $\vec{E}_B$ . Однако такой путь создания вертикальной компоненты электрического вектора является конструктивно сложным, предполагает большие энергетические потери и нуждается в дополнительной оптимизации.

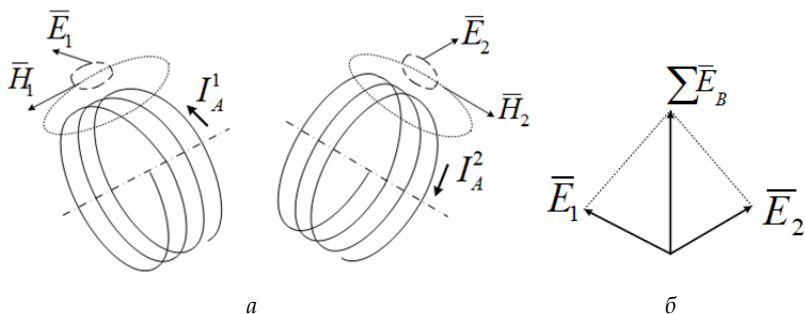


Рис. 3. Схематическое изображение рамочных антенн, расположенных под углом  $45^\circ$  к поверхности Земли (а) и вектор формируемого ими электрического поля (б)



Вычисления показывают, что вертикальная компонента вектора  $\vec{E}_B$  проявляется, если угол наклона антенн к поверхности Земли  $\alpha$  превышает  $24^\circ$ . При расчетах будем полагать:  $\alpha$  — угол наклона антенны;  $d$  — диаметр рамки;  $n$  — число витков (рис. 4);  $R$  — активное входное сопротивление;  $jX$  — реактивное входное сопротивление. Расчеты будем выполнять по методике [2].

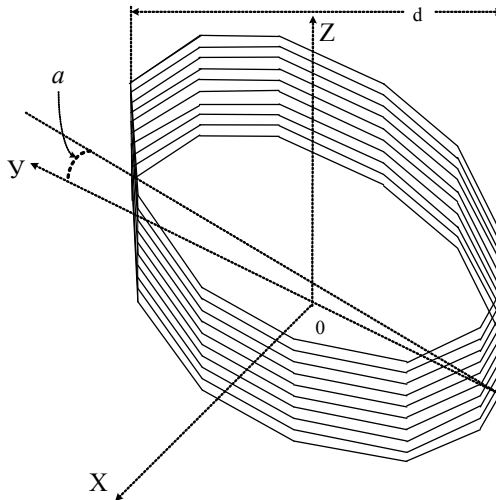


Рис. 4. Схема наклонной рамочной антенны, используемая при расчетах

Результирующие графики для данных  $d = 10$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $n = 30$  витков, диапазон частот — 10 — 300 кГц представлены на рисунке 5.

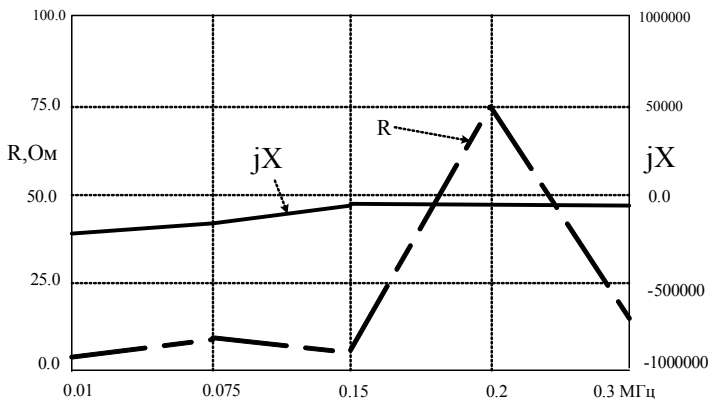


Рис. 5. Графики расчетов входного сопротивления антенной системы в виде многовитковой рамки по методике [2]

Из графиков видим, что реактивное сопротивление находится вблизи нулевого значения в диапазоне частот, в то время как активное сопротивление варьируется от 10 Ом до 75 Ом (на частоте 200 кГц). Будем считать, что излучатель работает в диапазоне СДВ радиочастотно-



го спектра. Соответственно, каждый виток цилиндрической спирали длиной  $\ell$  и диаметром  $d$  представляет элементарный магнитный излучатель и для него выполняются следующие условия элементарности [3]:  $\ell \ll \lambda$  и  $d \ll \lambda$ . Из этого следует, что цилиндрическая спираль будет обеспечивать совместную работу большого числа элементарных магнитных и элементарных электрических излучателей, формирующих компоненты электромагнитного поля в дальней зоне воздушной среды:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= j [120\pi I \ell / 2 \lambda r] \sin\theta e^{-jkr}, \\ E_{\varphi} &= [120\pi I \kappa S / 2 \lambda r] \sin\theta e^{-jkr}, \\ H_{\varphi} &= j [I \ell / 2 \lambda r] \sin\theta e^{-jkr}, \\ H_{\theta} &= - [I \kappa S / 2 \lambda r] \sin\theta e^{-jkr}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $r$  – расстояние до выбранной точки поля;  $k$  – волновое число  $k = 2\pi / \lambda$ ;  $I$  – ток в антенне;  $\ell$  – длина излучателя;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $S$  – площадь элементарной рамки.

Суммарное поле (1) в точке его анализа определяется суммой векторов элементарных излучателей:

$$\Sigma E = E_{\theta} + E_{\varphi} = [120\pi I / 2 \lambda r] (j \ell + \kappa S) \sin\theta e^{-jkr}, \quad (2)$$

$$\Sigma H = H_{\theta} + H_{\varphi} = [I / 2 \lambda r] (j \ell - \kappa S) \sin\theta e^{-jkr}. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) интерес представляет сумма в круглых скобках, которую следует рассмотреть дополнительно:

$$\begin{aligned} (j \ell + \kappa S) &= j (\ell - j \kappa S) = j \ell [1 - j (\kappa S / \ell)] = j \ell [1 - j (2\pi S / \lambda \ell)] = \\ &= j \ell [1 - j (\omega S / c \ell)]. \end{aligned}$$

Здесь  $c = 1 / (\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$  – скорость света, но  $(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} = W_{\text{воз}} = 120\pi$ ;  $\epsilon S / \ell$  – емкость  $C$  между витками (элементарными магнитными излучателями) на расстоянии  $\ell$ , то есть длины элементарного электрического излучателя;  $\omega S / c \ell = 120 \pi \omega C / \epsilon$ ;  $C = 1 / X_c$ .

Путем преобразований последнего выражения получаем

$$(j \ell + \kappa S) = j \ell [1 - j (120\pi \omega C / \epsilon)] = j \ell [1 - j (120\pi / \epsilon X_c)]. \quad (4)$$

Аналогичным образом можно показать, что для подобной суммы в выражении (3) имеем

$$(j \ell - \kappa S) = j \ell [1 + j (120\pi \omega C / \epsilon)] = j \ell [1 + j (120\pi / \epsilon X_c)]. \quad (5)$$

Результаты (2)–(5) показывают следующее:

– электрический вектор составляющей поля, создаваемой элементарным электрическим диполем при сложении с полем элементарного магнитного диполя, будет уменьшаться пропорционально увеличению емкости антенны ( $120\pi / \epsilon X_c$ );

– магнитный вектор, создаваемый элементарным электрическим диполем при сложении с полем элементарного магнитного диполя, будет увеличиваться пропорционально увеличению емкости антенны;





— величина составляющих суммарного поля в дальней зоне одновременно работающих элементарного электрического и элементарного магнитного излучателей зависит от емкостного сопротивления цилиндрической спирали, причем энергия суммарного поля практически не изменяется.

Поскольку входное сопротивление антенной системы неравномерно (рис. 5), рассмотрим способы его возможного согласования с фидерной линией, например путем введения в цепь рамки идентичных компланарных линий (рис. 6). Положим, что рамочная антенна содержит три витка одинакового диаметра — 10 м. Первый виток включает четыре компланарных линии (№1, №2, №3 и №4); второй — три компланарных линии (№5, №6 и №7); третий — две (№8 и №9).

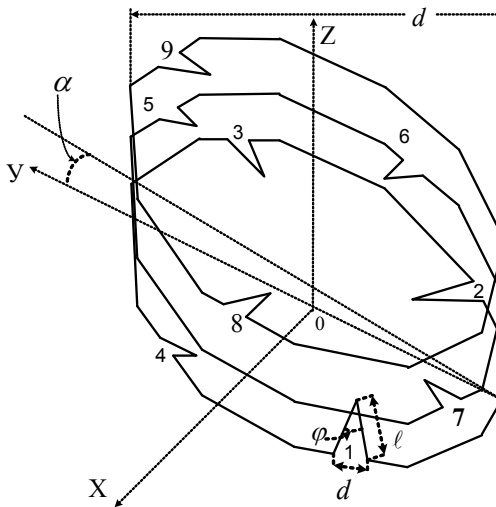


Рис. 6. Расположение компланарных линий на витках рамочной антенны:  
 $\varphi$  — угол между соседними линиями;  $d$  — расстояние между линиями в точках подключения их к виткам рамочной антенны

Взаимное сопротивление компланарных линий определяется по формуле [4]

$$R_{12}(m, \ell, f) = 30 \cdot (m \cdot \ell_1)(m \cdot \ell_2) \cdot \left[ \left( \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \frac{\sin md}{md} + \frac{\left( \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 2}{(md)^2} \cdot \left( \frac{\sin md}{md} - \cos md \right) \right].$$

При расчете полагаем:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\ell_1$  — длина первой линии,  $\ell_2$  — длина второй линии; воздушная среда с параметрами  $\epsilon = 10, \mu = 10$ . При этом получено десятикратное уменьшение длины компланарных линий, что позволяет уменьшить их размер с 10 м до 1 м с сохранением тех же значений сопротивления в используемом диапазоне частот. Результаты расчетов, представленные на рисунке 7 свидетельствуют о высокой стабильности входного сопротивления антенной системы: как активного,



так и реактивного, что позволяет формировать таким способом более сложные конструкции (рис. 8), характеризующиеся диаграммой направленности с заданными свойствами [4; 5].

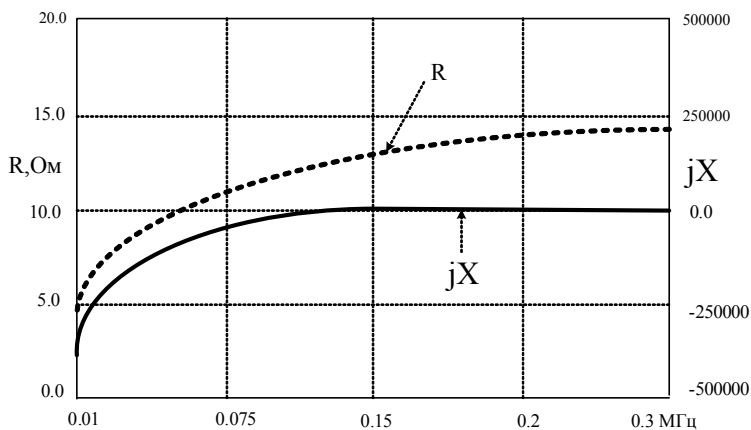
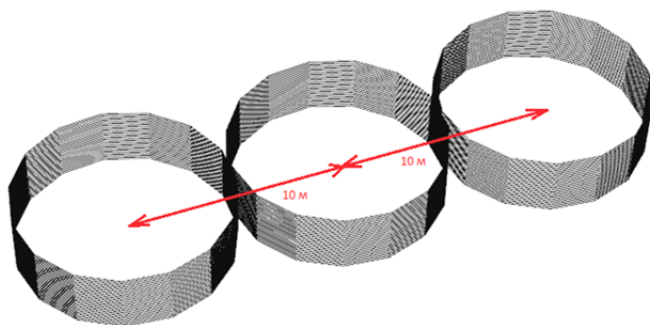
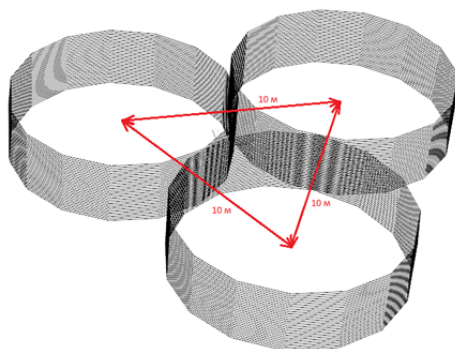


Рис. 7. Результаты расчета входного сопротивления трехвитковой рамочной антенны



а



б

Рис. 8. Предлагаемые варианты конфигурации антенных систем на основе многовитковых рамок



Таким образом, оптимизация параметров конструкций антенных систем СДВ- и ДВ-диапазонов за счет применения рамочных систем, вместо используемых в настоящее время Г-, Т-образных и зонтичных, позволит существенно уменьшить их массогабаритные характеристики. Дальнейшего улучшения параметров можно достичь путем замены цельнометаллических проводников рамочных антенн на литцендрат [5]. Последний отличается высокими качествами по параметру скин-эффекта, поскольку содержит до двух тысяч жил в сечении, изолированных друг от друга.

#### Список литературы

1. Блюх П.В., Николаенко А.П., Филиппов Ю.Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости земля – ионосфера. Киев, 1977.
2. Корабельная передающая антенная система – 6 : пат. 176449 Рос. Федерация. № 2017125585 ; заявл. от 2017.07.17 ; опубли. 2018.01.18.
3. Вершков М.В., Миротворский О.Б. Судовые антенны. Л., 1990.
4. Виниченко А.И. Теория тракта распространения радиоволн линий радиосвязи. Л., 1984.
5. Гончаренко И.В. Антенны КВ и УКВ. Часть II. Основы и практика. М., 2005.

#### Об авторах

Виктор Ефимович Пониматкин – канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Светлана Геннадьевна Шпилевая – канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Владислав Алексеевич Гоглев – студент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Борис Игоревич Каскевич – студент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

#### The authors

Dr Viktor E. Ponimatkin, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Vladislav A. Goglev, Undergraduate Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Boris I. Kaskevich, Undergraduate Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

О. Н. Шабловский

РАСПАД СЛАБОГО РАЗРЫВА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН  
В НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЕ С ИСТОЧНИКОМ

84

Рассмотрено пространственно нелокальное волновое уравнение четвертого порядка с источником. Результаты изложены в терминах теории теплопереноса. Производная от функции источника по температуре положительная (источник технического происхождения) либо отрицательная (источник, характерный для биологической ткани). Скорость волны (дозвуковая, звуковая, сверхзвуковая) определяется по отношению к скорости распространения тепловых возмущений. Даны примеры точного решения задачи о распаде слабого разрыва температурного поля. Эта задача состоит в следующем. В начальном состоянии непрерывное тепловое поле содержит точку, в которой располагается слабый разрыв, а именно: здесь терпит разрыв первого рода первая производная по координате. В последующем слабый разрыв распадется на две волны, распространяющиеся в противоположных друг другу направлениях. Подробно обсуждены разнообразные ситуации, при которых происходит возбуждение разбегающихся волн. Источник технического происхождения: две волны, бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью; неоднородный фон перед волнами является пространственно-периодическим; в отдельном случае неоднородность фона локализована на обеих сторонах слабого разрыва. Источник в биологической ткани: тепловое поле между волнами есть суперпозиция двух бегущих волн, для которых произведение модулей скоростей перемещения равно квадрату скорости распространения тепловых возмущений. Неоднородный фон перед волнами является пространственно-периодическим и, в частности, представляет собой биения по пространственной координате. Построен пример распада слабого разрыва, для которого в ходе эволюции во времени в возмущенной области формируется стоячая волна.

*A spatially non-local fourth-order wave equation with a source is considered. The results are set out in terms of the heat transfer theory. The temperature derivative of the source function is positive (a technical source) or negative (a source in biological tissue). The wave velocity (subsonic, sonic, supersonic) is determined with respect to the velocity of propagating heat perturbations. We give examples of the exact solving the problem of disintegration of a weak discontinuity in the temperature field. This problem is set as follows. In the initial state the continuous thermal field contains a point of a weak discontinuity; in that point the first coordinate derivative undergoes a first-order rupture. Further the weak discontinuity disintegrates into two waves which propagate in opposite directions. Initiation of such waves is discussed in detail. A technical source: two subsonic, sonic or supersonic waves; the non-uniform space in front of the waves is spatially periodic; in a particular case spatial non-uniformity is localized on both sides of a weak discontinuity. A source in biological tissue: the thermal field between the waves is a superposition of two running waves for which the product of velocity moduli is equal*



to the square of propagating thermal perturbations velocity. The non-uniform space in front of the waves is spatially periodic and is displayed as spatial coordinate beating. An example is built for disintegration of a weak discontinuity when time evolution in the perturbed region leads to forming a standing wave.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нелокальность, источник энергии, стоячая волна.

**Keywords:** wave equation, nonlocality, energy source, standing wave.

## Введение

Теория волн имеет широкую область практических приложений. В данной работе для определенности говорим о волнах в системе «среда — источник энергии» и пользуемся терминами теории теплопереноса. Гиперболическое уравнение теплопроводности

$$c \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + q_0 \quad (1)$$

учитывает конечную скорость  $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2}$  распространения тепловых возмущений. Здесь  $t$  — время;  $x$  — декартова координата;  $\tau = T - T^0$  есть отклонение температуры  $T$  от ее отсчетного значения  $T^0 \equiv \text{const}$ ;  $c$  — объемная теплоемкость;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  — время релаксации теплового потока;  $q_0$  — мощность внутренних источников и стоков энергии.

Уравнение (1) имеет строгое физическое обоснование [1] и выводится с помощью вариационных принципов [2; 3]. Примеры термодинамического анализа неклассических (в том числе нелокальных) процессов переноса массы, импульса и энергии изложены в [4]. Волновое уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = k_v(\tau) \equiv q_0 / (c\gamma) \quad (2)$$

следует из (1) при  $\gamma \partial / \partial t \gg 1$ , когда волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным. При учете пространственно-нелокальных эффектов переноса (см. [5] и указанную там библиографию) в правой части уравнения (2) появляется слагаемое  $\epsilon \chi_1^2 \partial^4 \tau / \partial x^4$ , где  $\epsilon \chi_1^2$  есть параметр слабой нелокальности задачи. Современное состояние математических исследований нелокального волнового уравнения представлено в [6–9].

Волна, распространяющаяся со скоростью  $N = dx/dt$ , является дозвуковой / сверхзвуковой, если  $N/w$ , соответственно, меньше / больше единицы. Для перехода к безразмерным величинам будем применять масштабы температуры  $\tau_b$  и времени  $t_b$ :



$$\begin{aligned} (\tau/\tau_b) \rightarrow \tau; (t/t_b) \rightarrow t; [x/(wt_b)] \rightarrow x'; \\ [(k_v t_b^2)/\tau_b]; [\varepsilon \chi_1^2/(w^4 t_b^2)] \rightarrow (\varepsilon \chi^2). \end{aligned}$$

В результате имеем безразмерную форму записи нелокального волнового уравнения в пределе слабой нелокальности:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial (x')^4} = k_v. \quad (3)$$

Волна дозвуковая, если  $(dx'/dt) < 1$ ; волна сверхзвуковая, если  $(dx'/dt) > 1$ . Далее рассматриваем источник вида

$$k_v = k_v^1 \tau, \quad k_v^1 \equiv \text{const}. \quad (4)$$

Данный источник моделирует процессы энергообмена в системах различной физической природы.

Источник технического происхождения (tech-источник,  $k_v^1 > 0$ ) положителен в области «высоких» температур  $\tau > 0$ , где происходит подвод тепла, и отрицателен при «низких» температурах  $\tau < 0$  (например, вследствие теплоотвода от элемента технического устройства в окружающую среду). Источник, типичный для биологической ткани (bio-источник,  $k_v^1 < 0$ ), отличается от объектов неживой природы тем, что выполняет уравнивающую роль компенсатора [10]: при «высоких» температурах  $\tau > 0$  идет теплоотвод; при «низких» температурах  $\tau < 0$  происходит выделение энергии. Задачи теплопереноса в биологической ткани рассматривались в публикациях [11–14]. В статье [15] определена роль комплекса  $k_v^1 \varepsilon \chi^2$  при оценке границ устойчивости / неустойчивости колебаний теплового поля.

**Цель работы:** для уравнения (3) с источником (4) построить новые точные решения, физическое содержание которых связано с процессом образования волн при распаде слабого разрыва теплового поля.

### Тех-источник

Уравнение (3) запишем в виде системы, определяющей две неизвестные функции  $\tau, \theta$ :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v; \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2}. \quad (5)$$

Перейдем к независимым переменным

$$\alpha = x' + Mt, \quad \beta = x' - Mt, \quad M \equiv \text{const}$$

и представим решение в виде

$$\tau = \exp(k\beta) \tau_1(\alpha), \quad \theta = \exp(k\beta) \theta_1(\alpha), \quad k \equiv \text{const}. \quad (6)$$



Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M^2 \left( \frac{d^2 \tau_1}{d\alpha^2} - 2k \frac{d\tau_1}{d\alpha} + k^2 \tau_1 \right) = k_v^1 \tau_1 + k^2 \theta_1 + 2k \frac{d\theta_1}{d\alpha} + \frac{d^2 \theta_1}{d\alpha^2}, \quad (7)$$

$$\theta_1 = \tau_1 + \varepsilon \chi^2 \left( \frac{d^2 \tau_1}{d\alpha^2} + 2k \frac{d\tau_1}{d\alpha} + k^2 \tau_1 \right). \quad (8)$$

Примем следующие связи между параметрами задачи:

$$\varepsilon < 0, \quad k^2 = 1/(-\varepsilon \chi^2) > 0, \quad M^2 = -\varepsilon \chi^2 k_v^1, \quad k_v^1 > 0. \quad (9)$$

Тогда (8) и (9) дают возможность проинтегрировать один раз уравнение (7):

$$\frac{d^3 \tau_1}{d\alpha^3} + 4k \frac{d^2 \tau_1}{d\alpha^2} + (5 + M^2) k^2 \frac{d\tau_1}{d\alpha} + 2k^3 (1 - M^2) \tau_1 = 0. \quad (10)$$

Константа интегрирования несущественна и принята нулевой. Взяв экспоненциальную форму решения  $\tau_1(\alpha) = \exp(\alpha z)$ ,  $z \equiv \text{const}$ , выводим из (10) характеристическое уравнение:

$$z^3 + pz + q = 0,$$

$$p = k^2 [M^2 - (1/3)], \quad q = 2k^3 (17 - 15M^2)/9.$$

Рассмотрим три частных случая, когда решение удастся представить в обозримой форме.

Значение  $M^2 = 1$  дает возможность понизить на единицу порядок уравнения (10) и получить решение

$$\tau^\mp = C_1 \exp[-k(x' \pm 3t)] \sin[(x' \pm t)k\sqrt{2} + \alpha_1]; \quad C_1, \alpha_1 - \text{const}, \quad (11)$$

где верхний знак (решение  $\tau^-$ ) относится к левой части оси ( $x' \leq 0$ ,  $k > 0$ ), нижний знак (решение  $\tau^+$ ) — к правой части оси ( $x' \geq 0$ ,  $k < 0$ ).

Для простоты записи берем  $C_1^- = C_1^+ = C_1$ ,  $\alpha_1^- = \alpha_1^+ = \alpha_1$ . Данное решение позволяет рассмотреть задачу о распаде слабого разрыва на две волны возмущения, распространяющиеся в противоположных направлениях. В начальном ( $t=0$ ) состоянии имеем при  $x' \in (-\infty, \infty)$  непрерывное температурное поле:

$$\tau = \tau_0^-(x'), \quad x' \leq 0; \quad \tau = \tau_0^+(x'), \quad x' \geq 0,$$

$$\tau_0^-(0) = \tau_0^+(0).$$

Вместе с тем в точке  $x'=0$  располагается слабый разрыв, потому что здесь терпит разрыв первого рода первая производная по координате:



$x'=0$ ,  $d\tau_0^-(x')/dx' \neq d\tau_0^+(x')/dx'$ . При  $t > 0$  слабый разрыв распадается на две волны  $x' = \mp 3t$ , распространяющиеся по пространственно-периодическому фону  $\tau_0^\mp(x') = C_1 \sin\left[2kx'\sqrt{2/3} + \alpha_1\right]$ ,  $kx' \leq 0$ . Температурное поле между этими волнами описывается решением (11). На основе (11) можно рассмотреть неоднородный по координате и затухающий на бесконечности температурный фон:

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \exp\left[kx' \frac{(1-\delta_1)}{\delta_1}\right] \sin\left[kx'\sqrt{2} \frac{(3\delta_1-1)}{3\delta_1} + \alpha_1\right]; \quad (12)$$

$$kx' \leq 0, 0 < \delta_1 \leq 1; x' \rightarrow \mp\infty, \tau^\mp \rightarrow 0.$$

В этом случае разбегающиеся волны имеют вид  $x' = \mp 3\delta_1 t$ . Скорости волн дозвуковые при  $0 < \delta_1 < (1/3)$  и сверхзвуковые при  $(1/3) < \delta_1 \leq 1$ . Для  $\delta_1 = 1/3$  фон (12) — аperiodический по  $x'$ , а волны распространяются со скоростью «звука»  $w$ . Представляет интерес случай  $\delta_1 = +0$ , когда  $[(1-\delta_1)/\delta_1] \gg 1$ , то есть неоднородность фона (12) локализована на обеих сторонах слабого разрыва, и происходит медленное расширение области решения.

Значение  $M^2 = 17/15$  дает корни  $z_{1,2} = \pm 2ki/\sqrt{5}$ , поэтому решение (6), (10) выглядит так:

$$\tau = C_1 \exp(k\beta) \sin\left[2k\alpha/\sqrt{5} + \alpha_1\right]; C_1, \alpha_1 - \text{const}; \quad (13)$$

$$\alpha = x' + M_1 t, \beta = x' - M_1 t, M_1^2 = 17/15.$$

Интерпретация этого решения такая же, как для  $M^2 = 1$ : задача о распаде слабого разрыва. Для левой и правой полуосей имеем, соответственно,

$$\tau^- = \tau(\alpha, \beta) \text{ при } k > 0, x' \leq 0, M_1 = M_1^- = -(17/15)^{1/2}; \tau^+ = \tau(\alpha, \beta)$$

при  $k < 0, x' \geq 0, M_1 = M_1^+ = (17/15)^{1/2}$ .

Температурный фон слева и справа от слабого разрыва:

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \exp\left[kx' \frac{(\delta_1-1)}{\delta_1}\right] \sin\left[\frac{2kx'}{\sqrt{5}} \frac{(\delta_1+1)}{\delta_1} + \alpha_1\right]; \quad (14)$$

$$kx' \leq 0, \delta_1 \geq 1; C_1^- = C_1^+ = C_1, \alpha_1^- = \alpha_1^+ = \alpha_1.$$

Разбегающиеся со сверхзвуковой скоростью волны имеют вид  $x' = \delta_1 M_1^\mp t$ .

Значение  $M^2 = 1/3$  дает корни  $z_{1,2} = kb_3(1 \pm i\sqrt{3})/2$ ,  $b_3 = (8/3)^{1/3}$ ,  $z_3 = -kb_3$ . Часть решения, которая относится к корню  $z_3$ , не представляет интереса, а на основе корней  $z_1, z_2$  получаем





$$\tau = C_1 \exp \left[ kx' \left( 1 + \frac{b_3}{2} \right) + kM_2 t \left( \frac{b_3}{2} - 1 \right) \right] \sin \left[ kb_3 \frac{\sqrt{3}}{2} (x' + M_2 t) + \alpha_1 \right]; \quad (15)$$

$$C_1, \alpha_1 - \text{const}, M_2^2 = 1/3.$$

В задаче о распаде слабого разрыва для левой и правой полуосей имеем, соответственно,  $\tau^- = \tau(x', t)$  при  $k > 0, x' \leq 0, M_2 = M_2^- = -1/\sqrt{3}$ ;  $\tau^+ = \tau(x', t)$  при  $k < 0, x' \geq 0, M_2 = M_2^+ = 1/\sqrt{3}$ . Температурный фон слева и справа от слабого разрыва:

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \exp \left[ kx' \left( 1 + \frac{b_3}{2} \right) \frac{(\delta_1 - 1)}{\delta_1} \right] \sin \left[ kb_3 \frac{\sqrt{3}}{2} x' \left( 1 + \frac{B_3}{\delta_1} \right) + \alpha_1 \right]; \quad (16)$$

$$kx' \leq 0, \delta_1 \geq 1, B_3 = \left( 1 + \frac{b_3}{2} \right) / \left( 1 - \frac{b_3}{2} \right); C_1^- = C_1^+ = C_1, \alpha_1^- = \alpha_1^+ = \alpha_1.$$

Разбегающиеся волны имеют вид  $x' = \delta_1 M_2^\mp t / B_3$ . Движение дозвуковое, если  $1 \leq \delta_1 < (B_3 \sqrt{3})$ ; движение сверхзвуковое, если  $\delta_1 > (B_3 \sqrt{3})$ ; значение  $\delta_1 = B_3 \sqrt{3}$  дает звуковую волну.

Качественные свойства полученных решений представлены в таблице 1.

Таблица 1

**Техн-источник: точные решения уравнения (3), (4) при  $\varepsilon < 0, k_0^1 > 0$**

Значение параметра $M^2 = -\varepsilon \chi^2 k_0^1$	Волновой процесс и его свойства
$M^2 = 1$	Решение (11): распад слабого разрыва на две волны $x' = \mp 3\delta_1 t$ , $\delta_1 \in (0, 1]$ , бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Неоднородный фон: зависимость (12) и ее частные варианты, обусловленные выбором $\delta_1$
$M^2 = 17/15$	Решение (13): распад слабого разрыва на две сверхзвуковые волны $x' = \mp \delta_1 (17/15)^{1/2} t$ , $\delta_1 \geq 1$ . Неоднородный фон: периодическая по координате зависимость (14), имеющая постоянную либо убывающую по экспоненте амплитуду
$M^2 = 1/3$	Решение (15): распад слабого разрыва на две волны $x' = \mp \delta_1 t / (B_3 \sqrt{3})$ , $\delta_1 \geq 1$ , бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Неоднородный фон: затухающая в периодическом режиме зависимость (16); частный случай — синусоидальные колебания с постоянной амплитудой
Основной результат: аналитическое описание разбегающихся волн, возбуждаемых слабым разрывом теплового поля	

**Віо-источник**

Обсудим возможности аналитического описания системы уравнений (5) при  $\varepsilon > 0$ ,  $k_v^1 < 0$ . Сделаем замену  $k = il$ ,  $\alpha = i\varphi$  в (6)–(8) и примем следующие связи:

$$\varepsilon > 0, l^2 = 1/(\varepsilon\chi^2) > 0, M^2 = -\varepsilon\chi^2 k_v^1 > 0, k_v^1 < 0. \quad (17)$$

Действуем аналогично предыдущему и вместо (10) получаем уравнение

$$\frac{d^3\tau_1}{d\varphi^3} - 4l \frac{d^2\tau_1}{d\varphi^2} + (5 + M^2)^2 \frac{d\tau_1}{d\varphi} - 2l^3(1 - M^2)\tau_1 = 0. \quad (18)$$

При работе с функциями вида  $\exp(il\beta)$  выделяем действительные части решения; для мнимых частей структура аналитических выражений такая же. Характеристическое уравнение, соответствующее (18), выглядит так:

$$z^3 + pz + q = 0, \\ p = l^2[M^2 - (1/3)], q = -2l^3(17 - 15M^2)/9.$$

Конечную форму решения получаем для трех частных значений параметра  $M^2 = 1; 17/15; 1/3$ . Если  $M^2 = 1$ , то

$$\tau = C_1 \exp(2l\varphi) \sin(\varphi l\sqrt{2} + \varphi_1) \cos l\beta; C_1, \varphi_1 - \text{const}; \quad (19)$$

$$\beta = x' - Mt, \varphi = x' + Mt, M^2 = 1, l^2 M^2 = -k_v^1 > 0.$$

Физическая интерпретация решения состоит в следующем. В начальном состоянии имеем непрерывное при  $x' \in (-\infty, \infty)$  тепловое поле: для левой части оси  $x' \leq 0$ ,  $l < 0$ ,  $M^- = 1$ ,  $\tau_0^-(x') = C_1 \sin \varphi_1 \cos 2lx'$ ; для правой части оси  $x' \geq 0$ ,  $l > 0$ ,  $M^+ = -1$ ,  $\tau_0^+(x') = C_1 \sin \varphi_1 \cos 2lx'$ . Слабый разрыв отсутствует. При  $\varphi_1 = 0$  начальное тепловое поле однородное:  $\tau_0^\mp = 0$ . В сечении  $x' = 0$  температура изменяется по закону

$$\tau(x' = 0, t) = C_1 \exp(2lMt) \sin(lMt\sqrt{2} + \varphi_1) \cos(lMt), t \geq 0 \quad (20)$$

и возбуждает две звуковые волны  $x' = \mp t$ , бегущие в разные стороны. Отметим, что здесь  $lM = -(-k_v^1)^{1/2} < 0$ , а функцию (20) можно рассматривать как результат сложения двух затухающих колебаний с частотами  $lMt(\sqrt{2} \pm 1)$ . В левой и правой частях возмущенной области решение (19) можно представить как суперпозицию двух бегущих волн:

$$\tau^\mp(x', t) = C_1 \exp[2l(x' \pm t)] (\sin \alpha_1^\mp - \sin \beta_1^\mp) / 2, x' l \geq 0, t \geq 0; \quad (21)$$

$$\alpha_1^\mp = l[x'(1 + \sqrt{2}) \pm t(\sqrt{2} - 1)] + \varphi_1, \beta_1^\mp = l[x'(1 - \sqrt{2}) \mp t(1 + \sqrt{2})] - \varphi_1. \quad (22)$$



Волновым переменным (22) соответствуют скорости перемещения волн

$$N_1^\mp = \pm w(1 - \sqrt{2}) / (1 + \sqrt{2}), \quad N_2^\mp = \pm w(1 + \sqrt{2}) / (1 - \sqrt{2}).$$

Ясно, что  $N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2$ . Другой вариант физического истолкования решения (19) связан с распадом слабого разрыва:

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \exp\left[2lx' \frac{(\delta_1 - 1)}{\delta_1}\right] \sin\left[\varphi_1 + lx' \frac{(\delta_1 - 1)\sqrt{2}}{\delta_1}\right] \cos\left[lx' \frac{(1 + \delta_1)}{\delta_1}\right],$$

$$lx' \geq 0, \quad x' \in (-\infty, \infty), \quad 0 < \delta_1 < 1.$$

91

Этот неоднородный фон при  $\delta_1 = 1 - 0$  представляет биения по  $x'$  с затухающей по экспоненте амплитудой. Решение (19) описывает тепловое состояние среды между разбегающимися дозвуковыми волнами  $x' = \mp \delta_1 t$ . При  $\delta_1 = 1$  исходное тепловое поле не имеет слабого разрыва.

Значение  $M^2 = 17/15$  дает корни  $z_{1,2} = \pm 2il/\sqrt{5}$ , и в результате вычислений получаем решение для левой ( $x' \leq 0$ ,  $l < 0$ ) и правой ( $x' \geq 0$ ,  $l > 0$ ) частей координатной оси:

$$\tau^\mp = C_1 \sin\left[2l(x' + M_1^\mp t)/\sqrt{5} + \varphi_1\right] \cos\left[l(x' - M_1^\mp t)\right], \quad (23)$$

$$M_1^\mp = \mp(17/15)^{1/2}; \quad C_1, \varphi_1 - \text{const.}$$

В начальном состоянии ( $t=0$ ) тепловое поле непрерывное, и в точке  $x'=0$  находится слабый разрыв температуры:

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \sin\left[4lx'/\sqrt{5} + \varphi_1\right], \quad lx' \geq 0. \quad (24)$$

В последующие моменты времени слабый разрыв распадается на две волны  $x' = M_1^\mp t$ , бегущие в разные стороны по фону (24). В возмущенной области для левой и правой полуосей решение (23) можно записать как суперпозицию двух бегущих волн:

$$\tau^\mp = C_1 (\sin \alpha_1^\mp + \cos \beta_1^\mp),$$

$$\alpha_1^\mp = l \left[ x' \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + M_1^\mp t \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) \right] + \varphi_1,$$

$$\beta_1^\mp = l \left[ x' \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) + M_1^\mp t \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] + \varphi_1.$$

Этим волновым переменным соответствуют скорости перемещения волн

$$N_1^\mp = wM_1^\mp \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) / \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad N_2^\mp = wM_1^\mp \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) / \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$



Следовательно,  $N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2 M_1^2 = 17w^2/15$ .

Вместо фона (24) можно рассмотреть (см. (23)) пространственно-периодическую неоднородность вида

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \sin \left\{ 2lx'(1 + \delta_1) / (\delta_1 \sqrt{5}) + \varphi_1 \right\} \cos [lx'(\delta_1 - 1) / \delta_1],$$

$$lx' \geq 0, \delta_1 > 1.$$

Этот вариант интересен тем, что при  $\delta_1 = 1 + 0$  имеем режим биений фона по координате  $x'$ . Слабый разрыв инициирует две разбегающиеся волны  $x' = \delta_1 M_1^\mp t$ , которые являются дозвуковыми при  $\delta_1^2 < (15/17)$ ; пороговое значение  $\delta_1^2 = (15/17)$  определяет звуковые волны возмущения; при  $\delta_1^2 > (15/17)$  получаем распад на две сверхзвуковые волны. Значение  $\delta_1 = 1$  дает фон (24).

В случае  $M^2 = 1/3$  решение строим на основе характеристических корней  $z_{1,2} = l(-1 \pm i\sqrt{3})/a_3$ ,  $a_3 = 3^{1/3}$ . Для левой ( $x' \leq 0$ ,  $l < 0$ ) и правой ( $x' \geq 0$ ,  $l > 0$ ) частей оси получаем

$$\tau^\mp = C_1 \exp \left[ -\frac{l}{a_3} (x' \pm M_2 t) \right] \sin \left[ \varphi_1 - l\sqrt{a_3} (x' \pm M_2 t) \right] \cos [l(x' \mp M_2 t)], \quad (25)$$

$$M_2 = 1/\sqrt{3}; C_1, \varphi_1 - \text{const.}$$

Укажем запись решения (25) в виде суперпозиции двух бегущих волн:

$$\tau^\mp = C_1 \exp \left[ -\frac{l}{a_3} (x' \pm M_2 t) \right] \left[ \sin \alpha_1^\mp + \cos \beta_1^\mp \right] / 2,$$

$$\alpha_1^\mp = \varphi_1 + lx' (1 - \sqrt{a_3})^\mp l M_2 t (1 + \sqrt{a_3}),$$

$$\beta_1^\mp = \varphi_1 - lx' (1 + \sqrt{a_3})^\pm l M_2 t (1 - \sqrt{a_3}).$$

Скорости распространения этих волн обладают свойством

$$N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2 M_2^2 = w^2/3.$$

Физическая модель решения (25): две волны возмущения  $x' = \mp \delta_1 M_2 t$ ,  $0 < \delta_1 < 1$ , образовавшиеся в результате распада слабого разрыва, движутся с дозвуковыми скоростями по пространственно-периодическому фону

$$\tau_0^\mp(x') = C_1 \exp \left[ \frac{lx'(1 - \delta_1)}{a_3 \delta_1} \right] \sin \left[ \varphi_1 + lx' \frac{(1 - \delta_1)\sqrt{a_3}}{\delta_1} \right] \cos \left[ lx' \frac{(1 + \delta_1)}{\delta_1} \right],$$

$$lx' \leq 0, x' \in (-\infty, \infty).$$



Здесь при  $\delta_1 = 1 - 0$  имеем режим биения по  $x'$  с затухающей по экспоненте амплитудой. Если  $\delta_1 = 1$ , то в начальном состоянии слабый разрыв отсутствует:  $\tau_0^\mp(x') = C_1 \sin \varphi_1 \cos(2lx')$  — и появление разбегающихся волн обусловлено воздействием температуры  $\tau(x' = 0, t)$ , которая есть результат сложения двух затухающих колебаний с частотами  $lM_2(1 \pm \sqrt{a_3})$ , см. (25).

Качественные свойства полученных решений представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Вио-источник: точные решения уравнения (3), (4) при  $\epsilon > 0, k_0^1 < 0$**

Значение параметра $M^2 = -\epsilon \chi^2 k_0^1$	Волновой процесс и его свойства
$M^2 = 1$	Решение (19) — суперпозиция двух бегущих волн, скорости перемещения которых обладают свойством $N_1 N_2 = w^2$ . Возмущенная область расположена между разбегающимися волнами $x' = \mp \delta_1 t$ . При $\delta_1 \in (0, 1)$ эти дозвуковые волны есть результат распада слабого разрыва. Пример неоднородного фона — биения по координате с затухающей амплитудой. При $\delta_1 = 1$ слабый разрыв отсутствует, и волны возмущения — звуковые
$M^2 = 17/15$	Решение (23) — суперпозиция двух бегущих волн, их скорости перемещения удовлетворяют соотношению $N_1 N_2 = 17w^2/15$ . При распаде слабого разрыва появляются две волны, разбегающиеся с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Пример неоднородного фона — биения по координате
$M^2 = 1/3$	Решение (25) — суперпозиция двух бегущих волн, для которых $N_1 N_2 = w^2/3$ . Слабый разрыв распадается на две звуковые волны $x' = \mp \delta_1 t / \sqrt{3}$ , $\delta_1 \in (0, 1)$ . Пример неоднородного фона — биения по координате с затухающей амплитудой
Основной результат: $(N_1 N_2) / w^2 = M^2 = -\epsilon \chi^2 k_0^1$	

### Формирование стоячей волны

Решение нелокального уравнения (3), (4) представим в виде

$$\tau = \tau_1 \cos \omega E + \tau_2 \sin \omega E, \quad \omega \equiv \text{const}, \quad (26)$$

$$\tau_1(\alpha, E) = g_1(E) \cos k_0 \alpha + h_1(E) \sin k_0 \alpha,$$

$$\tau_2(\alpha, E) = g_2(E) \cos k_0 \alpha + h_2(E) \sin k_0 \alpha,$$

$$\alpha = x' + Mt, \quad E = \exp(rt), \quad r < 0, \quad t \geq 0.$$



Эти выражения содержат сходящиеся ряды

$$\begin{aligned} g_1 &= a_0 + a_\delta E^\delta, \quad h_1 = b_0 + b_\delta E^\delta, \quad g_2 = u_0 + u_\delta E^\delta, \quad h_2 = v_0 + v_\delta E^\delta, \\ a_{2n+1} &= (-1)^{n+1} u_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!, \quad a_{2n+2} = (-1)^{n+1} a_0 \omega^{2n+2} / (2n+2)!, \\ b_{2n+1} &= (-1)^{n+1} v_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!, \quad b_{2n+2} = (-1)^{n+1} b_0 \omega^{2n+2} / (2n+2)!, \\ u_{2n+1} &= (-1)^{n+2} a_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!, \quad u_{2n} = (-1)^n u_0 \omega^{2n} / (2n)!, \\ v_{2n+1} &= (-1)^{n+2} b_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!, \quad v_{2n} = (-1)^n v_0 \omega^{2n} / (2n)!; \\ \delta &= 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $a_0, b_0, u_0, v_0$  – произвольные постоянные; повторяющийся индекс  $\delta$  означает суммирование. Данное построение выполнено при следующих двух связях между параметрами задачи  $r, k_0$ :

$$\varepsilon \chi^2 k_0^4 + (M^2 - 1) k_0^2 + k_0^1 = 0, \quad r = 2k_0 M < 0.$$

Отсюда находим

$$(k_0^1)_{1,2} = \left[ 1 - M^2 \pm \sqrt{(1 - M^2)^2 - 4k_0^1 \varepsilon \chi^2} \right] / (2\varepsilon \chi^2). \quad (27)$$

Решение (26) существует, если правая часть выражения (27) положительная. Обращаем внимание на то, что  $M$  и  $k_0$  входят сюда четным образом.

Обсудим примеры. Для  $k_0^1 > 0, \varepsilon < 0$  и  $k_0^1 < 0, \varepsilon > 0$  нужно взять в (27), соответственно, «минус» и «плюс». Оба эти варианта дают решение независимо от величины  $M^2$  для дозвукового и сверхзвукового процессов. Если  $k_0^1 \varepsilon > 0$ , то необходимо иметь  $(1 - M^2)^2 > 4k_0^1 \varepsilon \chi^2$ . Решение существует и содержит две частоты  $(k_0^1)_{1,2}$ , соответствующие двум положительным корням  $(k_0^2)_{1,2}$ . Если при  $k_0^1 > 0, \varepsilon > 0$  имеем дозвуковой процесс,  $M^2 < 1$  либо, если при  $k_0^1 < 0, \varepsilon < 0$  имеем сверхзвуковой процесс,  $M^2 > 1$ .

Нужное нам решение получаем суперпозицией двух функций вида (26):  $\tau = \tau^+ + \tau^-$ . Первая часть решения  $\tau^+$  записывается на основе (26) при  $M < 0, k_0 > 0$ , то есть линия  $\alpha^+ = 0$  есть волна, бегущая вправо, в сторону  $x' > 0, x'_w = t|M|$ ; вторая часть решения  $\tau^-$  получается при  $M > 0, k_0 < 0$  и содержит волну  $\alpha^- = 0$ , бегущую влево, в сторону  $x' < 0, x'_w = -t|M|$ . В начальный момент времени  $t=0$  в точке  $x'=0$  находится слабый разрыв теплового поля, разделяющий неоднородные по координате  $x'$  температурные поля  $\tau_l^0(x'), x' \leq 0$  и  $\tau_r^0(x'), x' \geq 0$ . При  $t > 0$



этот слабый разрыв распадается на две волны, бегущие в разные стороны:  $x'_w = \mp t|M|$ ,  $t \geq 0$ . Тепловой фон перед волнами определяется зависимостями

$$\begin{aligned} \tau_l^0(x') &= \tau^+(\alpha = 2x', E = E_l^0(x')) + \tau^-(\alpha = 0, E = E_l^0(x')), \quad x' \leq 0; \\ \tau_r^0(x') &= \tau^+(\alpha = 0, E = E_r^0(x')) + \tau^-(\alpha = 2x', E = E_r^0(x')), \quad x' \geq 0; \\ E_l^0(x') &= \exp(-rx'/|M|), \quad E_r^0(x') = \exp(rx'/|M|). \end{aligned}$$

Решение  $\tau = \tau^+ + \tau^-$  характеризует состояние среды между разбегающимися волнами. В ходе установления по времени ( $t \rightarrow \infty, E \rightarrow 0$ ) получаем стоячую волну  $\tau = a_0^+ \cos[k_0(x'+tM)] + a_0^- \cos[k_0(x'-tM)]$ ;  $k_0^1 \varepsilon < 0$ . Если  $k_0^1 \varepsilon > 0$  и исходное решение содержит две частоты  $(k_0)_1$  и  $(k_0)_2$ , то при  $t \rightarrow \infty$  получаем суперпозицию двух стоячих волн вида  $\cos[(k_0)_1(x' \pm tM)]$ ,  $\cos[(k_0)_2(x' \pm tM)]$ . Таким образом, решение  $\tau = \tau^+ + \tau^-$  описывает при  $t \geq 0$  состояние, предшествующее выходу температуры на режим стоячей волны.

### Заключение

Получены точные частные решения нелокального волнового уравнения (3) при положительном и отрицательном наклоне  $dk_0/dt$  функции источника (4). Эти результаты представлены в таблицах 1 и 2. Построен пример (26) распада слабого разрыва, дающий в установившемся во времени ( $t \rightarrow \infty$ ) состоянии стоячую волну.

### Список литературы

1. Никитенко Н.И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73, №4. С. 851 – 859.
2. Глазунов Ю.Т. Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40, №1. С. 134 – 138.
3. Яворский Н.И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. №3. С. 3 – 10.
4. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J. Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin ; Heidelberg, 2001.
5. Алфимов Г.А. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, №4. С. 585 – 602.
6. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
7. Мамчур М.О. Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественнонаучная сер. 2014. №7. С. 45 – 59.



8. Кереев М.А., Геккиева С.Х. Первая краевая задача для неоднородного не-локального волнового уравнения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2016. №4. С. 76–86.

9. Дрегла А.И., Сидоров Н.А. Идентификация динамики внешней силы при моделировании колебаний // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2017. Т. 19. С. 105–112.

10. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial temperature in the resting human forearm // Journal of Appl. Physiol. 1948. Vol. 1. P. 93–122.

11. Tung M.M., Trujillo M., Lopez Molina J.A. et al. Modelling the heating of biological tissue based on the hyperbolic heat transfer equation // Mathematical and Computer Modelling. 2009. Vol. 50. P. 665–672.

12. Ching-yu Y. Boundary estimation of hyperbolic bio-heat conduction // Int. J. Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 54. 2506–2513.

13. Lin S.-Y., Chou T.-M. Numerical analysis of the Pennes bioheat transfer equation on skin surface // Third Int. Conf. of Robot, Vision and Signal Processing. 2015. P. 71–74.

14. Mochmacki B., Ciesielski M., Piasecka-Bellhayat A. Numerical solution of the bio-heat transfer equation with uncertain parameters using the sensitivity analysis method // Defect and Diffusion Forum. 2017. Vol. 379. P. 39–47.

15. Шабловский О.Н. Колебания, резонансы и волны в нелокальной среде с источниками // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. №4. С. 5–14.

#### Об авторе

Олег Никифорович Шабловский – д-р физ.-мат. наук, проф., Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Республика Беларусь.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

#### The author

Prof. Oleg N. Shablovsky, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru



**В. Л. Щербань**

## ПОЧЕМУ ОКРУЖАЮЩЕЕ НАС ПРОСТРАНСТВО ИМЕННО ТРЕХМЕРНО

*Неслучайно современная наука не может ответить на вопрос, почему пространство, в котором мы существуем и которое обзираем, трехмерное. Считается, что попытки найти ответ на этот вопрос, оставаясь только в пределах математики, обречены на неудачу. Однако в представленном math-исследовании показано, что только средствами высшей арифметики возможно объяснение, почему пространство именно трехмерно. Вслед за этим дан ответ на следующий важный вопрос: где и как происходит потеря и последующее восстановление симметрии в пространственных числовых фигурах, почему происходит потеря стабильной числовой симметрии? Настоящее арифметическое исследование покажет, что за внешней хаотичностью окружающих нас вещественных чисел скрыта бесконечная степень их организаций, основой которой является числовая матрица, называемая «треугольник Паскаля» и размещенная в пространстве. Ибо любой отрезок, любого возрастающего вещественного числового ряда принадлежит к какой-либо последовательности, в которой каждый член определяется как некоторая функция предыдущих.*

*We note that it is no accident that modern science cannot answer to the question why our space we exist in and which we see is three-dimensional. Therefore, it is believed that attempts to find an answer to this question, by remaining only within the mathematics, are bound to fail. On the contrary, it is in the present math study that it is shown that why space is three-dimensional can only be explained only by means of higher arithmetic. This is followed by an answer to the following important question. Where and how the loss and subsequent recovery of symmetry in spatial numerical figures occurs. Why is there a loss of stable numerical symmetry? The present arithmetic study will show that behind the external randomness of the real numbers around us is an infinite degree of their organizations, which is based on numerical matrix called the «Pascal's triangle» being placed in space. Because any segment of any increasing real number series belongs to any sequence in which each term is defined as some function of the previous ones.*

**Ключевые слова:** трехмерное пространство, возвратные последовательности, числа Фибоначчи, простые числа.

**Keywords:** three-dimensional space, return sequences, Fibonacci numbers, Prime numbers.

### Введение

Вместо вступления обозначим цикл настоящего исследования: пространство [1], в котором числовые фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры, симметрия и антисимметрия. Математическая



модель пространства без элементов геометрии не может быть сложной, ибо должна быть просчитана арифметически, а вот сложные геометрические образы предполагают многообразие разных пространственных числовых фигур (или объектов) [2]. Вслед за этим полагается подтвердить основополагающие свойства такого пространство. Выбираем для исследования модель, в которой положение точки задается относительно трех осей координат с заданием упорядочить тройку чисел как вещественных величин.

### Натуральный ряд как предмет специального рассмотрения в числовых таблицах

98

*Априори* следует считать, что порядок, основанный на параметрическом определении пространства без элементов геометрии, — это точки пространства, обозначенные упорядоченными натуральными числами. Размерность такого пространства равняется возможному числу равносильных беспредельных (но не безграничных!) математических действий, необходимых, чтобы отличить точки (подразумеваем — числа) пространства друг от друга. Для этого необходимо установить, что числовые последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, являются возвратными или рекуррентными [3]. Последовательное нахождение таких чисел определяется при помощи возвратного уравнения. С этого места и далее (если иное, то будет отмечено отдельно) задействован только натуральный ряд чисел [4]:  $(a_n = 1, 2, 3, 4, \dots)$ . Он имеет возвратное (рекуррентное) уравнение  $(1 + a_n = a_{n+1})$ , в котором первое число *единица* находится на оси реальной симметрии. Плюс особое число нуль, которое находится на условных (предполагаемых) осях системы координат и служит в том числе и для кодирования всего множества рациональных чисел. Считаем непротиворечивым следующее утверждение. Арифметические действия над числами равносильны размерности (*A*-мерности) математического пространства как объекта, в котором фиксируются отношения между ними.

В действительности существуют только три *беспредельных* и *бесконечных* математических действия (операции) над натуральными числами ( $A=3$ ). Это «сложение» чисел, которое должно быть еще в точности определено. «Вычитание» чисел, представленное математическим символом как разность числовых операций (небезграничных, например, из меньшего числа нельзя отнять большее число). «Сравнение» чисел, представленное математическим символом как определенная сумма числовых операций сложения и возможным вычитанием.

Только для этих трех математических числовых операций используются символы (названия) чисел, которые можно заменить количеством натуральных предметов и разместить в пространстве в виде арифметических таблиц. Из этого следует, что арифметические таблицы, в отличие от всех других математических таблиц, можно расположить в *трехмерном* пространстве, где обозначение цифровых символов



можно заменить количеством вещественных предметов. Тогда понятия таблица *безграничная* и таблица *бесконечная* (беспредельная) будут неэквивалентны. Это можно проверить и сравнить с таблицами для быстрого счета — умноженных чисел [5]. Далее, в арифметических таблицах для прямого нахождения всех простых чисел [6] естественно отсутствует операция «деления» чисел. Поэтому сравнимость чисел  $(a)$  и  $(b)$  по числовому модулю  $(q)$  означает только возможность представить  $(a)$  в виде  $(a = b + qt)$ , где число  $(t)$  целое, например — таблица 6, 8.

Все существующие математические таблицы сводятся к одной элементарной числовой дискриминантной матрице [7], в которой разделительные вертикальные линии обозначают конкретные арифметические операции (табл. 1).

Таблица 1

Дискриминантная матрица  $(A = 3)$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} a & 0 & a \\ a & 1 & a \\ a & 2 & a \end{array} \right| \rightarrow \Leftrightarrow \leftarrow \left| \begin{array}{c|c|c} b & a & a \\ b & a & a \\ b & a & a \end{array} \right|$$

Обозначим вертикальные разделительные линии общепринятыми символами как операции сложения, умножения, числового модуля сравнения  $(\gamma) = (\text{mod } a)$ . Линейная позиция как система имеет следующий вид [8]:

$$[a = 0 + a, a = 1(a), a = 2(\gamma).] \rightarrow [b = a + a, b = a(a), b = a(\gamma).]$$

Подтвердим, что, если в арифметическом трехмерном объекте первым простым числом после единицы является число  $6\delta a$ , тогда решение системы чисел будет определено однозначно:  $(a = 2, b = 4)$ . В этом случае (Dis) — вещественный дискриминант натурального многочлена. При этом числовой символ  $(Q)$  будет означать только сумму необходимых арифметических операций для определения порядкового места числа  $(q)$  в его собственном ряду:

$$\begin{aligned} \text{Dis}(A_3; Q) &= [27b^2 + 4a^3] \rightarrow \\ &\rightarrow [(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \equiv 0(\text{mod } q)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Дополнительно и подробно согласно уравнению (8). Представим следующую дискриминантную матрицу размерности  $(A = 4)$  (табл. 2).

Линейная позиция как система должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} [a = 0 + a, a = 1(a), a = 2(\gamma), a = 3(\lambda).] \rightarrow \\ \rightarrow [b = a + a + a, b = a + a(a), b = a + a(\gamma), b = a + a(\lambda).] \end{aligned}$$

Решение числовой системы должно быть  $(a = 2, b = 6 = 2 \times 3)$ .



Таблица 2

Дискриминантная матрица ( $A = 4$ )

$$\left| \begin{array}{c|c|c} a & 0 & a \\ a & 1 & a \\ a & 2 & a \\ a & 3 & a \end{array} \right| \rightarrow \Leftrightarrow \leftarrow \left| \begin{array}{c|c|c|c} b & a & a & a \\ b & a & a & a \\ b & a & a & a \\ b & a & a & a \end{array} \right|$$

100

В математическом четырехмерном объекте арифметический символ ( $\lambda$ ) обозначает некую беспредельную числовую операцию, являющуюся суммой операций сложения, вычитания, числового сравнения. Для этого математического действия должны существовать ряды беспредельных числовых таблиц, которые также можно разместить в пространстве, заменяя числа количеством натуральных предметов. Обозначение ( $D$ ) является дискриминантом биквадратного многочлена, эквивалентного произведению дискриминантов двух квадратных многочленов:

$$Dis(A_4; Q) = [D] \rightarrow [(x_1 - x_2)^4 (x_3 - x_4)^4 \equiv (\lambda q)]. \quad (2)$$

## Почему пространство трехмерно

Понятие «числа измерений», или «размерности пространства», относится к фундаментальным понятиям математики и физики. Размерность — наиболее общее, количественно выражаемое свойство пространства [9]. В настоящее время описание реальности берет значение размерности в качестве исходного постулата. Иное не предлагается ввиду отсутствия доступной возможности объяснить, почему пространство именно трехмерно. Поиск математической модели пространства предвосхитил вопрос о симметрии в пространственных числовых фигурах. Как происходит потеря стабильной симметрии? Очевидно, что должен быть некий возвратный момент, фиксирующий это состояние интервалом от симметрии к стабильной (значит, не кратковременной) потере симметрии [10].

Обозначим на поверхности геометрический равнобедренный треугольник. Все точки пространства внутри треугольника последовательно пометим натуральными числами. Из воображаемого *несчетного* количества точек ( $2^a$ ) отсечем от вершины две первые точки, помеченные числами *один* и *два*. Получим усеченный равнобедренный треугольник с количеством помеченных точек ( $2^a - 2$ ). Теперь необходимо определиться с основополагающим свойством натуральных чисел. Все числа ( $2^n$ ) определим как принадлежащие к числам нулевого порядка. Все нечетные числа ( $q$ ), имеющие собственные простые делители только вида  $(p + 1) \equiv 0 \pmod{q}$ , плюс умноженных чисел —  $(q \cdot 2^n)$ , определим к числам первого порядка. Все числа, делящиеся на число *три*, определим к числам второго порядка. Все нечетные числа ( $q$ ), имеющие соб-



ственные простые делители только вида  $(p-1) \equiv 0 \pmod{q}$ , плюс умноженных чисел —  $(q \cdot 2^n)$ , определим к числам третьего порядка. Если число имеет признаки первого и третьего порядков, тогда тип определяется по собственному числу, например 245 (I), 175 (III).

На основе вышеизложенного создадим и рассмотрим геометрическую фигуру — усеченную треугольную пирамиду, у которой в основании расположен равнобедренный треугольник. Именно усеченную пирамиду, так как у ее вершины удалены первые две точки [11]. Материальные точки внутреннего пространства пирамиды обозначим неупорядоченными числами любого типа порядка; основание пирамиды — точками нулевого порядка; боковые грани — всеми точками первого, второго и третьего порядков. Подтверждаем, что Пифагоровых троек чисел-точек разных типов порядков  $(5^2 + 12^2 = 13^2)$  бессчетное число, то есть их невозможно подсчитать [12]. Так создаются арифметически просчитанные пространственные объекты. Сможем ли мы подсчитать или хотя бы *сравнить* с чем-либо несчетное количество чисел — точек, забытых (или набитых) в предполагаемую пирамиду? Хватит ли нашей числовой памяти для этого?

Каждый возрастающий рекуррентный ряд чисел имеет свою закодированную оперативную «память», которая распространяет всю арифметическую информацию посредством своего возвратного уравнения (в общем виде — числового сравнения). Принимаем и отмечаем, что натуральный ряд имеет абсолютную арифметическую память:  $(A_q + 1) = (A_{q+1})$ . Это возвратное уравнение состоит из одного переменного — для нахождения каждого нового числа (элемента) достаточно знать только одно предыдущее число. После ознакомления с «задачей о естественном размножении кроликов» Леонардо Пизанского или Фибоначчи [13] предстоит проанализировать некоторые вещественные ряды чисел, имеющие возвратное уравнение от двух (и более) переменных.

В таких последовательностях процесс нахождения нового элемента происходит непрерывно  $(A_n - A_{n-1} + A_{n-2})$ , без возможной группировки —  $(A_n + A_{n-2} - A_{n-1})$ , не нарушая правило, что только из большего числа можно вычесть меньшее число. В подобных числовых рядах и возможна утрата непрерывного потока арифметической информации, а значит, и потеря числовой симметрии (*положение I*). В подтверждение этого рассмотрим две последовательности, имеющие равные возвратные уравнения и начинающие с первого числа *единицы*:

$$(V_n) = 1, 6, 14, 24, 36, \dots; (V_n = 4V_{n-1} - 6V_{n-2} + 4V_{n-3}),$$

$$(U_n) = 1, 7, 16, 26, 36, \dots; (U_n = 4U_{n-1} - 6U_{n-2} + 4U_{n-3}).$$

Отыскиваем и устанавливаем последующие числа для каждого ряда:

$$V_6 = 4(36) - 6(24) + 4(14) = 144 - 144 + 56 = 56,$$

$$U_6 = 4(36) - 6(26) + 4(16) = 144 - 156 + 64 = 52.$$



Разумный наблюдатель, расположенный вне этих числовых цепочек (рядов), тут же подтвердит, что вышеназванные числовые *естественные* правила нарушены, а числа реальные найдены. Это можно объяснить только тем, что данные ряды не имеют абсолютной арифметической памяти, а все последующие числа гипотетически не представляют о существовании собственных первых пяти чисел. Для наглядного примера второй ряд ( $U_n$ ) разложим принципом последовательного вычитания собственных чисел для нахождения возвратного уравнения и убедимся в правильности нашего утверждения (табл. 3). Обратим внимание и на отсутствие первоначальной числовой симметрии. Далее, этим же способом разложим следующий ряд ( $W_n$ ) тем же возвратным уравнением и обнаружим пропажу из его арифметической памяти первого числа — *единицы* (табл. 3).

Таблица 3

Последовательное разложение рядов чисел ( $U_n$ ) и ( $W_n$ )

$(U_n)=$	1				
	7	6			
	16	9			
	26	10			
	36	10			
	52	16	6		
	96	44	28	22	
	216	120	76	48	26

$(W_n)=$	1				
	5	4			
	12	7	3		
	22	10	3		
	36	14	4	1	
	60	24	10	6	5
	112	52	28	18	12
	232	120	68	40	22

Осталось проанализировать оставшиеся три ряда с равными возвратными уравнениями:  $(A_n) = 1, 2, 6, 16, 36, \dots$ ;  $(B_n) = 1, 3, 8, 18, 36, \dots$ ;  $(C_n) = 1, 4, 10, 20, 36, \dots$ ;  $(C_n = 4C_{n-1} - 6C_{n-2} + 4C_{n-3})$ . Подтверждаем, что теперь все числа вида  $(2^a)$  бесспорно кодируются относительно своего порядкового места без утраты первоначальной числовой симметрии.

Вновь вернемся к абстрактному изложению, но вначале покажем действительное существование следующего положения. Представим ряд чисел второго порядка с одним переменным:  $(A_n = A_{n-1} + a)$ . Разложим на песчаной поверхности такой ряд в виде кучек камней (два камня есть число *два*, три камня — число *три*...). Предложим какому-то разумному наблюдателю, умеющему считать числа только до трех, определить различие двух конкретных соседних кучек. Конечно, каждую кучку камней этот наблюдатель последовательно разложит только на равные кучки, имеющие только по три камня.

Теперь разумным наблюдателем станет некий *куратор*, спустившийся к нам из четырехмерного мира [14] и не обладающий нашим десятичным счетом (но число один (*единица*) будет равно по значению). Этот потусторонний наблюдатель, разложив на песке три большие кучки камней с числами 37, 133, 301, предложил построить много таких



образований. Он взял из первой кучи один камень и зарыл его в песок, а оставшиеся камни сгруппировал по три. Далее повторил то же самое со второй кучей камней, но сначала сгруппировал ее на семь равных кучек. А после этого зарыл в песок из каждой образовавшейся кучки по одному камню... и показал на третью кучу камней и место без камней. Из чего стало очевидно, что предлагается отстроить заново бесконечный ряд кучек камней, в котором все кучи-числа имеют в своем составе только простые делители вида  $(p-1) \equiv 0 \pmod{3}$ . После паузы куратор воздвиг еще две кучи камней, равных числам 541, 853, дав осознать, что имеет возможность построить много-много таких  $(A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} + 72)$ .

Дать ему достойный ответ удалось, соорудив пять кучек камней из чисел третьего порядка – 313, 73, 1, 97, 361 – и потребовав от него построить еще одну кучу камней:  $(A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} + 168)$ . Исчезновение нашего оппонента произошло скоротечно, видимо, замкнуло что-то в его разумном существе. Еще бы, ведь проверить обоснованность расположения ряда камней посредством закапывания в песок одного камня явно недостаточно (*положение II*).

Как видится, предполагаемое четырехмерное пространство не обладает таким математическим качеством, как потеря устойчивой числовой симметрии и последующее ее восстановление (см. *положение I*). Четвертое обязательное математическое действие не дает возможности образовать антисимметрию согласно формуле (2). В таком математическом объекте при определении числовых сравнений четвертой степени (в точности, биквадратном  $(z^4 + az^2 + b) \equiv 0 \pmod{q}$ ), нет возможности воспользоваться резольвентой третьей степени, дискриминанты у которых сравнимы с наибольшим простым числом ( $q$ ), а только числовым преобразованием  $(z_1 z_2 = x)$ . Поэтому объем правильных геометрических тел в четырехмерном пространстве равносильен квадрату сумм произведений  $\lambda(x_1 x_2 + x_3 x_4)^2$ , где число ( $\lambda$ ) – иррациональное. Почему?

Разумный наблюдатель, находящийся в двухмерном пространстве, по определению обладает двумя безграничными действиями над натуральными числами – сложением и предельным вычитанием. Понятно, что этот наблюдатель представит правильную трехгранную пирамиду в трехмерном пространстве, а гипотетический объем пирамиды определит равенством  $V = \gamma' S h$ , обозначая ( $S$ ) как площадь боковой поверхности, ( $h$ ) как перпендикулярную высоту и множитель ( $\gamma'$ ) как поправочное иррациональное число. Термин «иррациональный» дословно означает «не имеющий отношения». Напротив, для наблюдателя, находящегося уже в трехмерном пространстве, множитель ( $\gamma$ ) будет реальным отношением между числами и равным одной трети! Или в точности:  $\{3 \equiv 2 \pmod{3}\}$  (табл. 1).

Вернемся к самому началу данного пункта, где мы определили усеченный равнобедренный треугольник с количеством обозначенных точек  $(2^a - 2)$ . Если пространство трехмерно и представимо в виде бес-



предельной объемной трехгранной пирамиды, то количество точек-чисел у отсеченной верхушки пирамиды для любого наблюдателя будет иррационально и восприниматься как начало бесконечного числового расширения.

### Нахождение арифметических таблиц и установление их числовых свойств

Что может поведать нам наблюдатель, находящийся в *двухмерном* пространстве и имеющий доступ в одномерное пространство по его определению [15]? Предложим ему подтвердить существование такого пространства и разместить в нем бесконечную одномерную таблицу, имеющую в составе особые числа — нули, расположенные в шахматно-ромбовом виде (табл. 4).

104

Таблица 4

#### Одномерная арифметическая таблица

0	....000 ....	0	.....010.....	1 1 1 1...
0	...0000...	1	...0110....	2 3 4 5...
0	....000 ....	2	...01210...	3 6 10 15...
0	...0000...	3	.013310..	4 10 20 35...
	.....			.....

В этой первой по счету арифметической таблице присутствует только один закон сложения, который гласит: каждое число является суммой двух ближайших к нему чисел предыдущей (верхней) горизонтали. Заменяем один из нулей на единицу и потребуем, чтобы этот закон сохранялся. Тогда «возмущение» будет распространяться в виде треугольника Паскаля, выраженного в равнобедренной форме [16]. Каждая горизонталь (строка) должна иметь свой фиксированный порядковый номер, позволяющий создать следующую арифметическую таблицу в системе позиционного (поместного) счета (табл. 5).

До первоначального знакомства с арифметическими таблицами необходимо обстоятельно ознакомиться с простейшими симметричными многочленами степенных сумм [17]. Для этого необходимы следующие обозначенные многочлены:

$$A_q(x) \equiv 0 \pmod{q} \quad (3)$$

$$A_q(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_n,$$

$$A'_q(x) = \binom{1}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{1}{2} a_2 x^{n-2} + \binom{1}{3} a_3 x^{n-3} + \dots + \binom{1}{n} a_n,$$

$$A''_q(x) = \binom{1}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{1}{3} a_2 x^{n-2} + \binom{1}{5} a_3 x^{n-3} + \dots + \binom{1}{2n-1} a_n,$$

$Dis(A_q)$  — числовой дискриминант многочлена:  $A_q(x)$ ,  $Res(A_q; A_{q-1})$  — числовой результат многочленов:  $A_q(x); A_{q-1}(x)$ .





Решить арифметическое сравнение (3) — значит найти все значения неизвестного числа ( $x$ ), ему удовлетворяющие. Два сравнения (или более), которым удовлетворяют одни и те же значения ( $x$ ), называются равносильными, или эквивалентными.

После вышеизложенного стал доступен общий метод составления всех арифметических таблиц. Расположим числа равнобедренного треугольника Паскаля в прямоугольный вид. Затем все числа, лежащие на фиксированных восходящих диагоналях, разместим по отдельным горизонталям. В этом случае суммы чисел, лежащих последовательно на фиксированных горизонталях, окажутся числами Фибоначчи (табл. 5 — С). Создадим производную от нее арифметическую таблицу (табл. 5 — В), в которой каждая фиксированная горизонталь отмечена порядковым номером ( $q$ ). В результате получим два числовых треугольника, которые назовем основополагающими и установим их теоретико-числовые свойства.

Таблица 5

Основополагающая таблица числовых сравнений

$q$	$B$	$C$
1	0	0
2	1	1
3	2	1
4	3 + 1	1 + 1
5	4 + 3	1 + 2
6	5 + 6 + 1	1 + 3 + 1
7	6 + 10 + 4	1 + 4 + 3
8	7 + 15 + 10 + 1	1 + 5 + 6 + 1
9	8 + 21 + 20 + 5	1 + 6 + 10 + 4
10	9 + 28 + 35 + 15 + 1	1 + 7 + 15 + 10 + 1
11	10 + 36 + 56 + 35 + 6	1 + 8 + 21 + 20 + 5
12	11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1	1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1
13	12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7	1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6
14	13 + 66 + 165 + 210 + 126 + 28 + 1	1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1
15	14 + 78 + 220 + 330 + 252 + 84 + 8	1 + 12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7
16	... ..	... ..

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера ( $q$ ), надлежит кодировать следующим способом (табл. 5). В точности, таблица (В):

$$B_q(x) \equiv 0(\text{mod } q), B_q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \dots + b_n,$$

число ( $q$ ) — обозначенный порядковый номер многочлена; число ( $n$ ) — обозначенное количество чисел ( $b$ ), стоящих на фиксированных горизонталях.

Соответственно, таблица (С):

$$C_q(x) \equiv 0(\text{mod } q), C_q(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + \dots + c_n; (c_1 = 1),$$

$$k = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n.$$



Число  $(k)$  является числом Фибоначчи. Зафиксируем непосредственную связь между числовыми многочленами:

$$B_q(x) - B_{q-1}(x) = C_q(x).$$

Отметим только простейшие числовые свойства таблиц  $(B)$  и  $(C)$ .

Система сравнений многочленов  $B_q(x) \equiv 0 \pmod{q}$ ,  $C_q(x) \equiv 0 \pmod{q}$  равносильна для всех простых чисел  $(q > 3)$ .

Доказательством этого утверждения является условие формулы (5). Соответствующие примеры:

$$B_7(x) = 6x^2 + 10x + 4 \equiv 0 \pmod{7}, x + 1 \equiv 0 \pmod{7},$$

$$C_7(x) = x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7}, x + 1 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Система сравнений

$$C_q(x) \equiv 0 \pmod{q}; C_{2q-1}(x) \equiv 0 \pmod{q}; B_{2q-1}(x) \equiv 0 \pmod{q}$$

равносильна для всех простых чисел  $(q > 3)$ . Пример:

$$C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6 \equiv 0 \pmod{91}; x + 1 \equiv 0 \pmod{7}, \\ x + 1 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Теперь следует зафиксировать непосредственную связь между числами Фибоначчи и степенной суммой от двух натуральных переменных:

$$S_q = x_1^q + x_2^q, f_1 = x_1 + x_2, f_2 = x_1 x_2,$$

$$(f_1^2 + x f_2) \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1}, 2B_q(x) - B_{q-1}(x) = Y_q(x). \quad (4)$$

В точности,  $(q > 3)$  — нечетное число, и далее:  $(x_1, x_2, q) = 1$ .

Например, воспользуемся формулой Варинга [18], по которой получаем явное выражение любой степенной суммы —  $(S_q)$ :

$$S_{13} = f_1^{13} + f_1 f_2^6 (13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13),$$

$$2B_{13}(x) - B_{12}(x) = Y_{13}(x) = 13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13,$$

$$2B_{15}(x) - B_{14}(x) = Y_{15}(x),$$

$$Y_{15}(x) = 15x^6 + 90x^5 + 275x^4 + 450x^3 + 378x^2 + 140x + 15.$$

Подтверждаем, что система уравнений и сравнений многочленов (4) имеют только одно нетривиальное решение:

$$\text{Res}(Y_q; x + 4) \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1}. \quad (5)$$

Примеры:

$$\text{Res}(Y_{13}; x + 4) \equiv 0 \pmod{2^{12} - 1}, \text{Res}(Y_{15}; x + 4) \equiv 0 \pmod{2^{14} - 1},$$

$$\text{Res}(Y_{103}; x + 4) \equiv 0 \pmod{2^{102} - 1}, \text{Res}(Y_{105}; x + 4) \equiv 0 \pmod{2^{104} - 1}.$$



Послесловие. Порядковыми номерами ( $q$ ) таблицы (С) зафиксирован ряд Фибоначчи – сумма чисел, лежащих на отдельных горизонталях. Каждое число ряда Фибоначчи ( $V_q$ ) равно сумме двух предыдущих чисел (положение III):  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ ; ( $V_q = V_{q-1} + V_{q-2}$ ). Порядковыми номерами ( $q$ ) в производной таблицы (В) зафиксирован следующий числовой ряд (сумма чисел, лежащих на отдельных горизонталях) (положение IV):

$$(W_q) = 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, \dots; (W_q = W_{q-1} + W_{q-2} + 1).$$

Эти две последовательности равнозначны – ( $V_q = W_{q-2} + 1$ ) – и располагают проверочным числовым сравнением для всех простых чисел (табл. 6):  $2W_q - W_{q-1} \equiv 0 \pmod{q}$ .

### Методика построения арифметических таблиц

Вертикальные возвратные (рекуррентные) числовые ряды, для которых осуществимо посредством правил вычислений (сложения, вычитания и числового сравнения) нахождение простейших свойств целых чисел, являются арифметическими таблицами. Основное числовое свойство таблиц размещается посредством действий (операций) над числами, лежащими на фиксированных горизонталях. На основе представленных числовых свойств (табл. 5) элементарно составляется следующая, принципиально важная арифметическая таблица (табл. 6). В этой таблице одновременно присутствуют сразу три возвратные числовые последовательности: собственный ряд чисел ( $q$ ) и два установленных ряда чисел ( $V_q$ ) и ( $W_q$ ) (см. положения III и IV).

Таблица 6

#### Нахождение всех простых чисел

$V_q$	$W_q$	$q$	»	$V_q$	$W_q$	$q$	»	$V_q$	$W_q$	$q$
0	0	1	»	55	143	11	»	6765	17710	21
1	1	2		89	232	12		10946	28656	22
1	2	3		144	376	13		17711	46367	23
2	4	4		233	609	14		28657	75024	24
3	7	5		377	986	15		46368	121392	25
5	12	6		610	1596	16		75025	196417	26
8	20	7		987	2583	17		121393	317810	27
13	33	8		1597	4180	18		196418	514228	28
21	54	9		2584	6764	19		317811	832039	29
34	88	10		4181	10945	20		... ..		

Примечание: метод дешифровки таблицы универсален для всех последующих таких таблиц.



Числовое сравнение  $V_q + W_q \equiv 0 \pmod{q}$  разрешимо (то есть имеет решение) для всех простых чисел ( $q$ ). Примеры (табл. 6):

$$V_{17} + W_{17} = 987 + 2583 \equiv 0 \pmod{17},$$

$$V_{19} + W_{19} = 2584 + 6764 \equiv 0 \pmod{19},$$

$$V_{23} + W_{23} = 17711 + 46367 \equiv 0 \pmod{23}.$$

Данный результат доказывается формулой (4), в которой сумма числовых коэффициентов многочлена ( $Y_q$ ) равна ( $m$ ), и далее: ( $V_q + W_q = m$ ).

108

### Некоторое пояснение о сути числового дискриминанта

Арифметическое определение дискриминанта кубического трехчлена известно — два вещественных корня такого многочлена равны (сравнимы). Неизвестно понятие геометрического дискриминанта равнобедренного треугольника, у которого две стороны равны (сравнимы). В арифметике как науке о числах нет и определения числового дискриминанта симметричных степенных сумм [19]. Поэтому впервые предоставим только числовые выкладки таких дискриминантов без формулировки их конкретного измерения —  $\text{Dis}(D; D_0)$ .

Двучлен с взаимно простыми натуральными переменными имеет вид

$$S_q = x^q + y^q = A_2; \sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy;$$

$$\text{Dis}(x, y) = k + 4; (\sigma_1^2 + k\sigma_2) \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1}.$$

Либо как в тексте, это формулы (4) и (5). Создаем простейшую арифметическую таблицу.

Воспользуемся формулой Варинга для получения степенной суммы от двух переменных через элементарные многочлены:

$$S_4 - \sigma_1^4 = -4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$

$$S_5 - \sigma_1^5 = -5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2,$$

$$S_6 - \sigma_1^6 = -6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3, \dots$$

Правая часть последних уравнений позволяет образовать таблицу числовых коэффициентов в абсолютных величинах (табл. 7). После расшифровки последует установление ее главного арифметического свойства.

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера ( $q$ ), надлежит кодировать следующим способом (табл. 7):



$$Y_q(x) \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1},$$

$$Y_q(x) = y_1 x^{n-1} + y_2 x^{n-2} + y_3 x^{n-3} + \dots + y_n, \quad (6)$$

число  $(q)$  — обозначенный порядковый номер многочлена; число  $(n)$  — обозначенное количество чисел  $(y)$ , стоящих на фиксированных горизонталях. Примеры:

$$Y_7(x) = 7x^2 + 14x + 7 \equiv 0 \pmod{7},$$

$$Y_{13}(x) = 13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13,$$

$$Y_{15}(x) = 15x^6 + 90x^5 + 275x^4 + 450x^3 + 378x^2 + 140x + 15.$$

109

Таблица 7

**Фрагмент коэффициентов степенной суммы от двух переменных**

$q$	$Y$
4	4 + 2
5	5 + 5
6	6 + 9 + 2
7	7 + 14 + 7
8	8 + 20 + 16 + 2
9	9 + 27 + 30 + 9
10	10 + 35 + 50 + 25 + 2
11	11 + 44 + 77 + 55 + 11
12	12 + 54 + 112 + 105 + 36 + 2
13	13 + 65 + 156 + 182 + 91 + 13
14	14 + 77 + 210 + 294 + 196 + 49 + 2
15	15 + 90 + 275 + 450 + 378 + 140 + 15
16	... ..

Для всех нечетных чисел  $(q)$  многочлен (6) имеет только одно нетривиальное решение — (5). После этого — (4).

Трехчлен с взаимно простыми натуральными переменными, в основе которого располагается формула (1):

$$S_q = x^q + y^q + z^q = A_3; S_q \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1}; \quad (7)$$

$$S_q \equiv 0 \pmod{\sigma_1}, \sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + xz + yz, \sigma_3 = xyz;$$

$$Dis(x, y, z) = 4k - 27; (\sigma_2^3 + k\sigma_3^2) \equiv 0 \pmod{2^{q-1} - 1}.$$

Если числовое сравнение

$$(\sigma_2^3 + k\sigma_3^2) \equiv 0 \pmod{q},$$

тогда

$$D = 4(xy + xz + yz)^3 + 27x^2y^2z^2 \equiv 0 \pmod{q}, \quad x + y + z \equiv 0 \pmod{q}, \\ z \equiv -x - y \pmod{q}.$$



Дискриминант должен быть симметричным относительно трех переменных:

$$D_0 = 4x^6 + 12x^5y - 3x^4y^2 - 26x^3y^3 - 3x^2y^4 + 12xy^5 + 4y^6 \equiv 0(\text{mod } q),$$

$$D_0 = (x-y)^2(x+2y)^2(2x+y)^2 \equiv 0(\text{mod } q),$$

$$D(x, y, z) = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2 \equiv 0(\text{mod } q). \quad (8)$$

Для нечетных чисел ( $q$ ) разложим по формуле Варинга степенную сумму от трех переменных такого вида —  $S_q \equiv 0(\text{mod } \sigma_1)$  (7):

110

$$S_9 = \dots - 9\sigma_2^3\sigma_3 + 3\sigma_3^3, \quad S_{11} = \dots + 11\sigma_2^4\sigma_3 - 11\sigma_2\sigma_3^3,$$

$$S_{13} = \dots - 13\sigma_2^5\sigma_3 + 13\sigma_2^2\sigma_3^3, \quad S_{15} = \dots + 15\sigma_2^6\sigma_3 - 50\sigma_2^3\sigma_3^3 + 3\sigma_3^5.$$

Правая часть последних уравнений позволяет создать таблицу числовых коэффициентов в абсолютных величинах (табл. 8). После расшифровки последует установление ее главного арифметического свойства.

Таблица 8

**Фрагмент коэффициентов степенной суммы от трех переменных**

$q$	$G$
9	9 + 3
11	11 + 11
13	13 + 26
15	15 + 50 + 3
17	17 + 85 + 17
19	19 + 133 + 57
21	21 + 196 + 147 + 3
23	23 + 276 + 322 + 23
25	25 + 375 + 630 + 100
27	27 + 495 + 1134 + 324 + 3
29	29 + 638 + 1914 + 870 + 29
31	31 + 806 + 3069 + 2046 + 155
33	...

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера ( $q$ ), надлежит кодировать уже известным способом (табл. 8):  $G_q(x) \equiv 0(\text{mod } 2^{q-1} - 1)$ .

Примеры:

$$G_{15}(x) = 15x^2 + 50x + 3 \equiv 0(\text{mod } 2^{14} - 1),$$

$$G_{23}(x) = 23x^3 + 276x^2 + 322x + 23 \equiv 0(\text{mod } 2^{22} - 1).$$

Беспорное (стало быть, которое невозможно опровергнуть) арифметическое свойство таблицы выглядит так:

$$\text{Re } s(G_q; 4x - 27) \equiv 0(\text{mod } 2^{q-1} - 1).$$



Примеры:

$$\text{Res}(G_{15}; 4x - 27) \equiv 0 \pmod{2^{14} - 1},$$

$$\text{Res}(G_{105}; 4x - 27) \equiv 0 \pmod{2^{104} - 1}.$$

Следующего такого дискриминанта от многочлена

$$S_q = x^q + y^q + z^q + u^q = A_4$$

не существует, и это подтверждается условием формулы (2).

Для объяснения существования вещественной числовой симметрии – антисимметрии потребовалась помощь удивительной рекуррентной последовательности (см. положение II), начинающейся с первого числа

$$(J_1 = 1): \dots, 361, 97, 1, 73, 313, 721, 1297, 2041, \dots; (J_n = 2J_{n-1} - J_{n-2} + 168).$$

Все числа этого ряда имеют простые делители только вида

$$(p - 1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Например:

$$J_4 = 721 = 7 \times 103$$

и далее –

$$(7 - 1) \equiv 0 \pmod{3}, (103 - 1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

### Заключение

Возможно ли доступно объяснить, почему пространство именно трехмерно? Да. Могут ли одномерное и двухмерное пространства рассматриваться как располагающиеся в трехмерном пространстве? Да. Само оно может считаться частью модели четырехмерного пространства? Нет.

### Список литературы

1. Визгин В.П. Единые теории поля в первой трети XX в. М., 1985.
2. Горелик Г.Е. Почему пространство трехмерно? М., 1982.
3. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. М., 1983.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М., 1954. С. 64–71.
5. Таблица умножения и игра, чтобы быстро выучить // UCHIM.ORG. URL: <https://uchim.org/matematika/tablica-umnozheniya> (дата обращения: 29.09.2019).
6. Воронин С.М. Простые числа. М., 1978.
7. Батхин А.Б. Вычисление обобщенного дискриминанта вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2017. №88.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М., 1975.
9. Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. М., 2010.



10. Сонин А. С. Постигание совершенства: симметрия, асимметрия, диссимметрия, антисимметрия. М., 1987.

11. *Геометрические фигуры*. Усеченная пирамида // Калькулятор : справочный портал. URL: <https://www.calc.ru/Geometricheskiye-Figury-Usehennaya-Piramida.html> (дата обращения: 29.09.2019).

12. *Пифагоровы тройки и их количество* // Энциклопедия Нестеровых. URL: <https://odiplom.ru/lab/pifagorovy-troiки-i-ih-kolichestvo.html> (дата обращения: 29.09.2019).

13. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., 1992.

14. Фейгин О. О. Механика машины времени. СПб., 2016.

15. *Виды пространств* // Волшебство жизни. URL: <http://volshebstvo.in.ua/2013/06/vidy-prostranstv/> (дата обращения: 29.09.2019).

16. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М., 1979.

17. Прасолов В. В. Многочлены. М., 2001. С. 20 – 22.

18. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. М., 2002. С. 53 – 55.

19. Александрова П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики. М. ; Л., 1951.

#### Об авторе

Виктор Леонидович Щербань – специалист, зав. учебной частью АНО «Центр дополнительного математического образования», Россия.

E-mail: sherba-q@ya.ru

#### The author

Viktor L. Scherban, Expert, Autonomous Non-Profit Organization «Center For Additional Mathematical Education», Russia.

E-mail: sherba-q@ya.ru



## ТРЕБОВАНИЯ И УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ В ВЕСТНИКЕ БФУ ИМ. И. КАНТА

### Правила публикации статей в журнале

1. Представляемая для публикации статья должна быть актуальной, обладать новизной, содержать постановку задач (проблем), описание основных результатов исследования, полученных автором, выводы, а также соответствовать правилам оформления.

2. Материал, предлагаемый для публикации, должен быть оригинальным, не публиковавшимся ранее в других печатных изданиях. При отправке рукописи в редакцию журнала автор автоматически принимает на себя обязательство не публиковать ее ни полностью, ни частично без согласия редакции.

3. Рекомендованный объем статьи для докторантов и докторов наук – 20–30 тыс. знаков с пробелами, для доцентов, преподавателей и аспирантов – не более 20 тыс. знаков.

4. Список литературы должен составлять от 15 до 30 источников, не менее 50 % которых должны представлять современные (не старше 10 лет) публикации в изданиях, рецензируемых ВАК и (или) международных изданиях. Оптимальный уровень самоцитирования автора – не выше 10 % от списка использованных источников.

5. Все присланные в редакцию работы проходят *внутреннее и внешнее рецензирование*, а также проверку системой «Антиплагиат», по результатам которых принимается решение о возможности включения статьи в журнал.

6. Статья на рассмотрение редакционной коллегией направляется ответственному редактору по e-mail. Контакты ответственных редакторов: [http://journals.kantiana.ru/vestnik/contact\\_editorial/](http://journals.kantiana.ru/vestnik/contact_editorial/)

7. Статьи на рассмотрение принимаются в режиме онлайн. Для этого авторам нужно зарегистрироваться на портале Единой редакции научных журналов БФУ им. И. Канта [http://journals.kantiana.ru/submit\\_an\\_article](http://journals.kantiana.ru/submit_an_article) и следовать подсказкам в разделе «Подать статью онлайн».

9. Решение о публикации (или отклонении) статьи принимается редакционной коллегией журнала после ее рецензирования и обсуждения.

10. Автор имеет право публиковаться в одном выпуске «Вестника Балтийского федерального университета им. И. Канта» один раз; второй раз в соавторстве – в исключительном случае, только по решению редакционной коллегии.

### Комплектность и форма представления авторских материалов

1. Статья должна содержать следующие элементы:

1) индекс УДК – должен достаточно подробно отражать тематику статьи (основные правила индексирования по УДК см.: <http://www.naukapro.ru/metod.htm>);

2) название статьи строчными буквами на русском и английском языках (до 12 слов);

3) аннотацию на русском и английском языках (150–250 слов, то есть 500 печатных знаков). Располагается перед ключевыми словами после заглавия;

4) ключевые слова на русском и английском языках (4–8 слов). Располагаются перед текстом после аннотации;

5) список литературы (примерно 25 источников) оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5. – 2008;

7) сведения об авторах на русском и английском языках (Ф. И. О. полностью, ученые степени, звания, должность, место работы, e-mail, контактный телефон);

8) сведения о языке текста, с которого переведен публикуемый материал.

2. Ссылки на литературу в тексте статей даются только в квадратных скобках с указанием номера источника из списка литературы, приведенного в конце статьи: первая цифра – номер источника, вторая – номер страницы (например: [12, с. 4]).

3. Рукописи, не отвечающие требованиям, изложенным в пункте 1, в печать не принимаются, не редактируются и не рецензируются.

## Общие правила оформления текста

Авторские материалы должны быть подготовлены *в электронной форме* в формате листа А4 (210 × 297 мм).

Все текстовые авторские материалы принимаются исключительно в формате *doc* и *docx* (Microsoft Office).

Подробная информация о правилах оформления текста, в том числе таблиц, рисунков, ссылок и списка литературы, размещена на сайте Единой редакции научных журналов БФУ им. И. Канта: <http://journals.kantiana.ru/vestnik/monograph/>.

Рекомендуем авторам ознакомиться с информационно-методическим комплексом «Как написать научную статью»: <http://journals.kantiana.ru/authors/imk/>.

## Порядок рецензирования рукописей статей

114

1. Все научные статьи, поступившие в редколлегию Вестника БФУ им. И. Канта, подлежат обязательному рецензированию. Отзыв научного руководителя или консультанта не может заменить рецензии.

2. Ответственный редактор серии определяет соответствие статьи профилю журнала, требованиям к оформлению и направляет ее на рецензирование специалисту, доктору или кандидату наук, имеющему наиболее близкую к теме статьи научную специализацию.

3. Сроки рецензирования в каждом отдельном случае определяются ответственным редактором серии с учетом создания условий для максимально оперативной публикации статьи.

4. В рецензии освещаются следующие вопросы:

а) соответствует ли содержание статьи заявленной в названии теме;

б) насколько статья соответствует современным достижениям научно-теоретической мысли;

в) доступна ли статья читателям, на которых она рассчитана, с точки зрения языка, стиля, расположения материала, наглядности таблиц, диаграмм, рисунков и формул;

г) целесообразна ли публикация статьи с учетом ранее выпущенной по данному вопросу литературы;

д) в чем конкретно заключаются положительные стороны, а также недостатки статьи, какие исправления и дополнения должны быть внесены автором;

е) рекомендуется (с учетом исправления отмеченных рецензентом недостатков) или не рекомендуется статья к публикации в журнале, входящем в Перечень ведущих периодических изданий ВАК.

5. Рецензирование проводится конфиденциально. Автор рецензируемой статьи может ознакомиться с текстом рецензии. Нарушение конфиденциальности допускается только в случае заявления рецензента о недостоверности или фальсификации материалов, изложенных в статье.

6. Если в рецензии содержатся рекомендации по исправлению и доработке статьи, ответственный редактор серии направляет автору текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование.

7. Статья, не рекомендованная рецензентом к публикации, к повторному рассмотрению не принимается. Текст отрицательной рецензии направляется автору по электронной почте, факсом или обычной почтой.

8. Наличие положительной рецензии не является достаточным основанием для публикации статьи. Окончательное решение о целесообразности публикации принимается редколлегией серии.

9. После принятия редколлегией серии решения о допуске статьи к публикации ответственный секретарь серии информирует об этом автора и указывает сроки публикации.

Текст рецензии направляется автору по электронной почте, факсом или обычным почтовым отправлением.

10. Оригиналы рецензий хранятся в редколлегии серии и редакции «Вестника Балтийского федерального университета им. И. Канта» в течение пяти лет.

*Научное издание*

ВЕСТНИК  
БАЛТИЙСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
им. И. КАНТА

2020

Серия

Физико-математические и технические науки

№ 1

Редактор *Н. С. Шкутко*. Корректор *В. Н. Ковалев*  
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 01.08.2020 г.

Формат 70×108 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 10,1

Тираж 1000 экз. (1-й завод 49 экз.). Цена свободная. Заказ

Подписной индекс 94112

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта  
236022, г. Калининград, ул. Гайдара, 6